GdT o-minimalité, 26 avril 2017.
César-Martinez
"Comportement de points (de torsion) sur une famille de Legendre"

§1. Motivation.

Conj MM : soit $\Sigma \subseteq A_{tors}$, A une var. abélienne $/K$, K c.d. nombres.

$$\bar{\Sigma} = \cup\, b+B \quad \text{union finie.}$$

stratégie : I) 1) $[0,1]^{2g} \xrightarrow{\exp} A$
2) Ax
3) Pila

II) les pts de torsion ont beaucoup de conj. + Pila-Wilkie

III) Arg. géométrique.

On utilisera Masser ; soit $P \in A_{tors}$, $\mathrm{ord}(P) = n$, $[K(P):K] > n^{1/\lambda}$.

On travail avec $E_\lambda = y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$. avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$.
$P_\lambda = (2, \sqrt{2(2-\lambda)}) \in E_\lambda$.

§2. Existe-t-il un nombre infini de λ t.q P_λ est de torsion dans E_λ ?

Notons qu'il n'y a pas n t.q $[n]P_\lambda = 0$ $\forall \lambda \in \bar{\mathbb{Q}}$
($\lambda = -6$ donne un contre-exemple).

On considère : $\{\lambda \in \bar{\mathbb{Q}} : \exists n \text{ t.q } [n]P_\lambda = 0 \text{ dans } E_\lambda\} = S$

Notons que $P_\lambda \in E_\lambda(\overline{\mathbb{Q}(\lambda)})$.

$$x([n]P_\lambda) = \frac{A_n(\lambda,2)}{B_n(\lambda,2)} \quad \text{fonct. rationnelles}$$

et P_λ est de torsion s'il existe n t.q $B_n(\lambda,2) = 0$, $\lambda \neq 0,1$. Racine en cor.

Supposons que S soit fini.

$$S_n = \{\lambda \neq 0,1 \mid B_n(\lambda,2) = 0\} \text{ et } S = \bigcup S_n \cup \{0,1\}.$$

On regarde $E/\mathbb{Q}(\lambda)$, $M_{\mathbb{Q}(\lambda)}$ = places

Thm Siegel : soit E une courbe ell. définie sur un corps de fonct. K et $S \subseteq M_K$. Alors l'ensemble des pts
$(E \hookrightarrow \mathbb{P}^2_K)$

$$\{P \in E(\bar{K}) : x(P) \in R_S$$

$$R_S = \left\{ \begin{array}{l} \text{anneau des sections } f \in K \text{ t.q} \\ v(f) \geq 0 \quad \forall v \notin S \end{array} \right\}$$

si $P_\lambda \in E(\mathbb{Q}(2, \sqrt{2(2-\lambda)}))$

$\{[n]P_\lambda\}$ fini

$x([n]P_\lambda) \in \mathbb{Q}[\lambda, \prod_{s\in S}(\lambda - s)^{-1}]$

Par Siegel, S est infini.

§ 3. Etude de la hauteur des éléments de S.

Soit $x \in F$ cdn. On définit

$$h_F(x) = \frac{\quad}{[F:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_F} \log \max\{1, |x|_v\}$$

La hauteur $h_F(x,y)$, pour $(x,y) \in E_\lambda(F)$, $\max\{1, |x|_v, |y|_v\}$, ne tient pas compte des pt. de tors, comme des pt. de hauteur 0. (tout ça ayant fixé un plongement $E \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\bar{\mathbb{Q}})$).

$h([n]P) \approx n^2 h(P)$, l'idée sera de faire quelque chose comme $\hat{h}(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{h([n]P)}{n^2}$ et pour $\hat{h}$ on a bien que les pt. de torsion auront hauteur 0.

Soit λ t.q P_λ est de torsion. notons qu'il existe une borne pour la diff. $|h(P) - \hat{h}(P)| \leq c \cdot h(E) + k$

de plus :

$$|h(P_\lambda) - \hat{h}(P_\lambda)| \leq c\, h(E_\lambda)$$
$$h(P_\lambda) \leq c' h(\lambda)$$

et ?

on veut trouver C cst. t.q $h(\lambda) < C$.