INTRODUCTION À LA THÉORIE DES MODÈLES

Ce texte fut une tentative de traduction de l'appendice **B** du récent "Asymptotic Differential Algebra and Model Theory of Transseries" [1] (que je recommande vivement). Dans cet appendice, les auteurs font une introduction aux bases de la théorie des modèles pour des non-logiciens. Même si leur choix de notation et leurs conventions me semblent toute une réussite, je n'ai pas pu m'empêcher de faire quelques changements endommageant la fidélité de la traduction. En effet, j'ai notamment rajouté des bouts, omis d'autres et changé l'ordre des choses, bien sûr, tout en ayant comme objectif de faire de ce document des notes complémentaires pour une introduction à la théorie des modèles. La plupart du texte reste dans leur esprit (j'espère). Je présente par avance mes excuses aux auteurs pour ce (très) libre usage de leur appendice.

Table des matières

1. Structures et langages

Dans cette section on introduit les notions de *structure* et de *langage* utilisées en théorie des modèles. Cela nous permettra d'avoir des versions générales de notions de morphisme, sous-structure et produit de structures.

1.1. **Structures.** Une structure est la donnée de :

(S1) un ensemble non-vide M ;

(S2) une famille $(R_i)_{i\in I}$ de relations $R_i \subseteq M^{m_i}$ où $m_i \in \mathbb{N}^*$;

(S3) une famille $(f_j)_{j\in J}$ de fonctions $f_j : M^{n_j} \to M$ où $n_j \in \mathbb{N}$.

Une telle structure est notée $\mathcal{M} = (M; (R_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J})$ ou tout simplement $(M; (R_i), (f_j))$. *L'arité* d'une relation R_i c'est l'entier m_i et celle d'une d'une fonction f_j l'entier n_j.

On appelle l'ensemble M l'ensemble de base de la structure $\mathcal{M}$. Par convention, on utilise la même lettre pour une structure et pour son ensemble de base, utilisant le caractère courbé $\mathcal{M}$ pour la structure et le caractère plat M pour son ensemble de base. Les relations (R_i) et les fonctions (f_j)) sont les *primitives* de la structure $\mathcal{M}$. Si f_j est telle que $n_j = 0$ dans

Date: 4 mars 2016.

la définition précédente, on identifie f_j a un élément de M et on appelle un telle fonction une *constante*. La taille de la structure $\mathcal{M}$ c'est le cardinal de son ensemble de base, noté $|M|$.

On trouve aussi dans la littérature récente des définitions de structure dans lesquelles au lieu d'un seul ensemble de base M, on a une famille d'ensembles $(M_s)_{s\in S}$. Une telle structure est dite une structure "à plusieurs sortes", où "S-sortée" (c'est bien le cas de l'appendice de [1]). La généralité supplémentaire de travailler avec des sortes donne un peu plus de flexibilité et permet de rester fidèle à la façon naturelle dont quelques objets mathématiques nous sont présentés classiquement. Néanmoins, les notations deviennent plus lourdes ce qui contrevient à l'esprit introductif de ce texte. On gardera donc ce point de vue classique. Voyons quelques exemples :

Exemples 1.1.

(1) Tout groupe abélien M (noté additivement) peut se voir de façon naturelle comme une structure $(M; 0, -, +)$ avec $0 \in M$ une constante et les fonctions
$$a \mapsto -a : M \to M, \text{ et } (a; b) \mapsto a + b : M \times M \to M.$$

(2) Un groupe ordonné M peut être vu comme une structure $(M, \leq, 0, -, +)$ où $\leq$ est la relation binaire de l'ordre et $(0, -, +)$ sont comme dans (1).

(3) Tout anneau R peut se voir de façon naturelle comme une structure $(R; 0, 1, -, +, \cdot)$ avec $0, 1 \in R$ des constantes et les fonctions
$$\begin{cases} r \mapsto -r : R \to R, \\ (r, s) \mapsto r + s : R \times R \to R, \\ (r, s) \mapsto r \cdot s : R \times R \to R. \end{cases}$$

(4) Soit R un anneau et M un R-module. Alors on peut voir M comme une structure comme dans (1) munie de plus des fonctions
$$a \mapsto ra : M \to M,$$
pour tout $r \in R$. Notons que si R est infini alors cette structure contient une infinité de fonctions primitives.

(5) Un corps valué (K, v) peut se voir comme une structure $(K, \mathcal{O}_K, 0, 1, +, \cdot)$ où $\mathcal{O}_K$ correspond à l'anneau de valuation $\mathcal{O}_K := \{x \in K : v(x) \geq 0\}$, et le reste c'est la structure d'anneau comme dans (2).

(6) Une deuxième façon de voir le corps valué (K, v) c'est de rajouter une relation binaire $(K; \mathrm{div}, 0, 1, -, +, \cdot)$ où div est un sous-ensemble de K^2 définie par
$$(x, y) \in \mathrm{div} \Leftrightarrow v(x) \leq v(y).$$

1.2. **Langages.** Un langage $\mathcal{L}$ est l'union de deux ensembles disjoints de symboles formelles :

(L1) $\mathcal{L}^{\mathfrak{r}}$ l'ensemble des *symboles de relation* de $\mathcal{L}$,

(L2) $\mathcal{L}^{\mathfrak{f}}$ l'ensemble des *symboles de fonction* de $\mathcal{L}$,

où chaque $R \in \mathcal{L}^{\mathfrak{r}}$ et chaque $f \in \mathcal{L}^{\mathfrak{f}}$ est muni d'un entier n_R, n_f appelés *l'arité de* R et *l'arité de* f respectivement. Si $n_f = 0$ on dit aussi que f est un *symbole de constante*.

Remarque 1.2. Un langage est aussi souvent appelé dans la littérature une "signature" ou un "vocabulaire".

Un langage $\mathcal{L}'$ est une *extension* d'un langage $\mathcal{L}$ (et $\mathcal{L}$ est un sous-langage de $\mathcal{L}'$) si $\mathcal{L}^{\mathfrak{r}} \subseteq \mathcal{L}'^{\mathfrak{r}}$, $\mathcal{L}^{\mathfrak{f}} \subseteq \mathcal{L}'^{\mathfrak{f}}$ et chaque symbole de $\mathcal{L}$ a la même arité dans $\mathcal{L}'$. On note cela par $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$. On définit la taille du langage $\mathcal{L}$ comme le cardinal

$$|\mathcal{L}| := \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}^{\mathfrak{r}} \cup \mathcal{L}^{\mathfrak{f}}|\}.$$

Exemple 1.3. Soit $\mathcal{L} := \{c, *, \otimes\}$ où $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\mathfrak{f}}$ (tous les symboles sont des symboles de fonction, donc $\mathcal{L}^{\mathfrak{r}} = \emptyset$) et

$$\begin{cases} c \text{ est d'arité } 0 \\ * \text{ est d'arité } 1 \\ \otimes \text{ est d'arité } 2. \end{cases}$$

Considérons aussi le langage $\mathcal{L}'$ qui étend $\mathcal{L}$ défini par $\mathcal{L}' := \{\sim, c, *, \otimes\}$ où $\sim$ est un symbole de relation d'arité 2 dans $\mathcal{L}'$.

1.3. **$\mathcal{L}$-structures.** Soit $\mathcal{L}$ un langage. Une $\mathcal{L}$-structure est une structure

$$\mathcal{M} = (M, (R^{\mathcal{M}})_{R \in \mathcal{L}^{\mathfrak{r}}}, (f^{\mathcal{M}})_{f \in \mathcal{L}^{\mathfrak{f}}})$$

telle que à chaque symbole de relation $R \in \mathcal{L}^{\mathfrak{r}}$ d'arité m on lui associe une interprétation $R^{\mathcal{M}}$ correspondant à un sous-ensemble de M^m, et à chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{L}^{\mathfrak{f}}$ d'arité n on lui associe une interprétation $f^{\mathcal{M}}$ qui correspond à la fonction $f^{\mathcal{M}} : M^n \to M$. En particulier, pour un symbole de constante c dans $\mathcal{L}$, son interprétation dans M est un élément $c^{\mathcal{M}} \in M$. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ sera parfois écrite aussi comme $(M, \mathcal{L})$ quand l'interprétation des symboles de $\mathcal{L}$ est claire dans le contexte. Étant donné $\mathcal{L}'$ une extension de $\mathcal{L}$, une $\mathcal{L}'$-structure $\mathcal{M}'$ est une $\mathcal{L}'$-*expansion* de la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ (et $\mathcal{M}$ est dite un $\mathcal{L}$-réduit de $\mathcal{M}'$) si les deux structures ont M comme ensemble de base et tout symbole de $\mathcal{L}$ à la même interprétation dans $\mathcal{M}$ et dans $\mathcal{M}'$.

Exemple 1.4. Soit $\mathcal{L} := \{c, *, \otimes\}$ le langage défini dans l'exemple 1.3. Le groupe additif des réels est une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, \mathcal{L})$ dans laquelle on interprète les symboles de $\mathcal{L}$ comme

$$\begin{cases} c^{\mathcal{M}} = 0 \in \mathbb{R} \\ *^{\mathcal{M}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \mapsto -a \\ \otimes^{\mathcal{M}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (a, b) \mapsto a + b. \end{cases}$$

On écrit aussi cette $\mathcal{L}$-structure comme $\mathcal{M} = (\mathbb{R}; 0, -, +)$. Le groupe multiplicatif des réels est aussi une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{N} = (\mathbb{R}^{\times}, \mathcal{L})$ dans laquelle on interprète les symboles de $\mathcal{L}$ comme

$$\begin{cases} c^{\mathcal{N}} = 1 \in \mathbb{R}^{\times} \\ *^{\mathcal{N}} : \mathbb{R}^{\times} \to \mathbb{R}^{\times}, a \mapsto a^{-1} \\ \otimes^{\mathcal{N}} : (\mathbb{R}^{\times})^2 \to \mathbb{R}^{\times}, (a, b) \mapsto ab. \end{cases}$$

Il y a bien sûr des $\mathcal{L}$-structures qui ne sont pas des groupes. En effet, n'importe quel ensemble avec un élément distingué, une fonction unaire et une opération binaire est une

$\mathcal{L}$-structure. Par exemple, on pourrait définir la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, \mathcal{L})$ par

$$\begin{cases} c^{\mathcal{Z}} = 7 \in \mathbb{Z} \\ *^{\mathcal{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, a \mapsto a+1 \\ \otimes^{\mathcal{Z}} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}, (a,b) \mapsto a^3 - b^2. \end{cases}$$

La structure $\mathcal{M}' = (\mathbb{R}; \leq, 0, -, +)$, où $\leq$ dénote l'ordre est une $\mathcal{L}'$-expansion de $\mathcal{M}$ dans laquelle on interprète le symbole de relation $\sim$ comme l'ordre.

Dans l'exemple précédent, on voit très bien que le choix des symboles du langage $\mathcal{L}$ ne reflète pas la structure de groupe dans les deux premiers ensembles. Quitte à être ambigüe sur l'usage des symboles formels et leur interprétation, on fera des choix canoniques pour quelques langages fondamentaux ayant comme objectif suivre les conventions usuelles de la pratique mathématique. Par la suite on conviendra donc à cet usage des langages suivants :

Définition 1.5.

(1) Le *langage des groupes* est noté par $\mathcal{L}_G := \{1, ^{-1}, \cdot\}$. Il contient que des symboles de fonction : un symbole de constante 1, un symbole de fonction unaire (ou d'arité 1) $^{-1}$ et un symbole de fonction binaire (ou d'arité 2) $\cdot$.

(2) Le *langage des groupes abéliens* est noté $\mathcal{L}_{GA} := \{0, -, +\}$. Comme le langage des groupes il contient un symbole de constante 0, un symbol de fonction unaire $^-$ et un symbole de fonction binaire $+$. Notons que c'est "le même langage" que $\mathcal{L}_G$ (et même que celui de l'exemple 1.3 !) sauf qu'on a pris des symboles différents. Ce choix est fait exclusivement pour avoir une intuition plus naturel au moment de parler d'une $\mathcal{L}_{GA}$-structure, même si rien nous empêche formellement d'avoir une $\mathcal{L}_{GA}$-structure qui ne soit pas un groupe abélien.

(3) Le *langage des anneaux* $\mathcal{L}_A := \{0, 1, -, +, \cdot\}$ qui étend le langage des groupes abéliens $\mathcal{L}_{GA}$ en rajoutant un symbole de constante 1 et un symbole de fonction binaire $\cdot$.

(4) Le *langage des ensembles ordonnés* $\mathcal{L}_O := \{\leq\}$ qui contient juste un symbole de relation binaire $\leq$.

(5) Avec (2) et (4) on trouve le *langage des groupes abéliens ordonnés* $\mathcal{L}_{GAO} := \{\leq, 0, -, +\}$.

(6) Avec (3) and (4) on trouve *le langage des anneaux ordonnés* $\mathcal{L}_{AO} := \{\leq, 0, 1, -, +, \cdot\}$.

(7) Soit R un anneau. Le *langage des R-modules* est

$$\mathcal{L}_{R-mod} := \mathcal{L}_{GA} \cup \{\lambda_r : r \in R\}$$

où chaque λ_r est un symbole de fonction unaire. Il s'agit d'une extension du langage des groupes additifs $\mathcal{L}_{GA}$.

(8) Le *langage $\mathcal{L}_{div}$ des corps valués* est $\mathcal{L}_A \cup \{\mathrm{div}\}$ avec div un symbole de relation binaire.

(9) Le *langage $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ de corps valués* est $\mathcal{L} \cup \{\mathcal{O}\}$ avec $\mathcal{O}$ un symbole de relation unaire.

Exemples 1.6.

(1) Tout groupe est une $\mathcal{L}_G$-structure en interprétant les symboles 1, $^{-1}$ et $\cdot$ comme l'identité du groupe, l'inverse du groupe et la loi du groupe respectivement.

(2) Tout groupe est aussi une $\mathcal{L}_{GA}$-structure en interprétant les symboles 0, $^-$ et $+$ comme l'identité du groupe, l'inverse du groupe et la loi du groupe respectivement. Par ailleurs, comme le montre l'exemple 1.4 n'importe quel ensemble avec un élément distingué, une opération unaire et une opération binaire est une $\mathcal{L}_{GA}$-structure (et aussi une $\mathcal{L}_G$-structure). Bien évidement, on prendra par la suite la convention d'utiliser le langage $\mathcal{L}_{GA}$ pour les groupes abéliens et le langage $\mathcal{L}_G$ pour un groupe quelconque.

(3) De même, tout anneau R est une $\mathcal{L}_A$-structure avec l'interprétation naturelle.

(4) Tout groupe abélien ordonné est une $\mathcal{L}_{GAO}$-structure.

(5) L'anneau ordonné des entiers et tout corps ordonné sont des $\mathcal{L}_{AO}$-structures.

(6) Soit (K, v) un corps valué. Ici par contre il y a un choix de langage important. On peut traiter K comme une $\mathcal{L}_{\text{div}}$-structure où $\mathcal{L}_{\text{div}}$ c'est $\mathcal{L} \cup \{\text{div}\}$ avec div un symbole de relation binaire interprété comme dans les Exemples 1.1 partie (5). On peut aussi le traiter comme une $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$-structure où $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ c'est $\mathcal{L} \cup \{\mathcal{O}\}$ avec $\mathcal{O}$ un symbole de relation unaire interprété comme l'anneau de valuation de K.

Bien évidement, toute structure $(M, (R_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J})$ est une $\mathcal{L}$-structure pour le langage naturel

$$\mathcal{L} := ((S_i)_{i\in I}, (g_j)_{j\in J}),$$

où les symboles sont interprétés comme $S_i^M = R_i$ et $g_j^M = f_j$ pour tout $i \in I$ et $j \in J$.

⚠ Grâce à un choix convenable des langages, la plupart du temps on omet le super-indice $\mathcal{M}$ et on dénote par la même lettre les symboles de $\mathcal{L}$ et leur interprétation dans $\mathcal{M}$. Le lecteur doit par contre garder en tête cette différence entre symboles de $\mathcal{L}$ et leur interprétation, même quand on utilise la même notation pour les deux. Ça à l'air compliqué au début, mais ça devient de plus en plus naturel au fur et à mesure.

1.4. **Sous-structures et morphismes.** Par la suite $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ dénoteront des $\mathcal{L}$-structures. Étant donné $A \subseteq M$, une application $h : A \to N$ et $a = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$, on notera $h(a)$ pour l'uplet $(h(a_1, \ldots, h(a_k)) \in N^k$.

1.4.1. *Sous-structures.* On dit que $\mathcal{M}$ est une $\mathcal{L}$-*sous-structure* de $\mathcal{N}$, noté $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, ou que $\mathcal{N}$ est une $\mathcal{L}$-extension de $\mathcal{M}$ si

(1) $M \subseteq N$,

(2) $R^{\mathcal{N}} \cap M^m = R^{\mathcal{M}}$ pour tout symbole de relation $R \in \mathcal{L}^{\mathfrak{r}}$ d'arité m,

(3) $f^{\mathcal{N}}|M^n = f^{\mathcal{M}}$ pour tout symbole de fonction $f \in \mathcal{L}^{\mathfrak{f}}$ d'arité n.

On omettra la mention du langage si cela ne mène pas de confusion et on dira que $\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$, ou que $\mathcal{N}$ est une extension de $\mathcal{M}$. Pour les groupes et les anneaux, cette notion coïncide avec les notions habituelles de sous-groupe et sous-anneau quand on travaille dans les langages $\mathcal{L}_G$ et $\mathcal{L}_A$ respectivement.

1.4.2. *Morphismes, plongements et isomorphismes.* Un $\mathcal{L}$-*morphisme* $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est une application $h : M \to N$ qui satisfait :

(M1) pour tout symbole de relation $R \in \mathcal{L}^{\mathfrak{r}}$ d'arité m et pour tout $a \in M^m$

$$a \in R^{\mathcal{M}} \Rightarrow h(a) \in R^{\mathcal{N}},$$

(M2) pour tout symbole de fonction $f \in \mathcal{L}^{\mathfrak{f}}$ d'arité n et pour tout $a \in M^n$
$$h(f^{\mathcal{M}}(a) = f^{\mathcal{N}}(h(a)).$$

Notons en particulier que l'interprétation d'un symbole de constante c dans $\mathcal{M}$ doit être envoyé par h à son interprétation dans $\mathcal{N}$, c'est à dire $h(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$.

Un $\mathcal{L}$-*plongement* est un $\mathcal{L}$-morphisme injective qui de plus vérifie une variante suivante de (M1) :

(M1') pour tout symbole de relation $R \in \mathcal{L}^{\mathfrak{r}}$ d'arité m et pour tout $a \in M^m$
$$a \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow h(a) \in R^{\mathcal{N}}.$$

Un $\mathcal{L}$-*isomorphisme* est un $\mathcal{L}$-plongement bijective. Si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, alors l'identité est un $\mathcal{L}$-plongement de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$. Par ailleurs, étant donné un $\mathcal{L}$-morphisme $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ on obtient une $\mathcal{L}$-sous-structure $h(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{N}$ avec ensemble de base $h(M)$ telle que si h est un $\mathcal{L}$-plongement alors $h : \mathcal{M} \to h(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{L}$-isomorphisme (exercice). Comme d'habitude, un $\mathcal{L}$-automorphisme de $\mathcal{M}$ c'est un $\mathcal{L}$-isomorphisme $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ et l'ensemble des $\mathcal{L}$-automorphismes de $\mathcal{M}$, noté $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathcal{M})$, forme un groupe par composition. On écrit $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ s'il y a un isomorphisme entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. Encore une fois, si $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ sont des groupes considérés comme des $\mathcal{L}_G$-structures ou des anneaux traités comme de $\mathcal{L}_A$-structures, alors un $\mathcal{L}_G$-morphisme (respectivement un $\mathcal{L}_A$-morphisme) $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ correspond aux notions habituelles de morphisme de groupe et morphisme d'anneau. Quand le langage $\mathcal{L}$ est fixé par le contexte, on omet la mention $\mathcal{L}$ disant juste morphisme, plongement, isomorphisme, etc. Par ailleurs, on écrit aussi $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ au lieu de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathcal{M})$.

1.5. **Noms et paramètres.** Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $A \subseteq M$. La structure $\mathcal{M}_A$ est obtenu en rajoutant comme primitive à la structure $\mathcal{M}$ une constante pour chaque $a \in A$. De façon analogue, on définit le langage $\mathcal{L}(A)$ comme l'union $\mathcal{L} \cup \{c_a : a \in A\}$ où chaque c_a et un nouveau symbole de constante. L'expansion de $\mathcal{M}$ au langage $\mathcal{L}(A)$ c'est la structure $\mathcal{M}_A$, dans laquelle on interprète chaque symbole de constante c_a par l'élément a. En particulier, si on prend $A = M$, on rajoute des constantes pour tout élément de M. Cette procédure est souvent appelé "rajouter des paramètres", "rajouter des noms".

Rajouter des paramètres (comme presque tout changement de langage) a des conséquences sur les morphismes. Par exemple, soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathcal{M})$ son groupe de $\mathcal{L}$-automorphismes. On a

$$\{\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathcal{M}) : \sigma(a) = a, a \in A\} = \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}(A)}(\mathcal{M}_A). \tag{1}$$

On utilisera souvent la notation plus suggestive $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathcal{M}/A)$ ou même $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)$ s'il n'y a pas de confusion, pour dénoter le groupe définit par (1).

2. Ensembles définissables

2.1. **Ensembles définissables I.** Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Pour $f \in \mathcal{L}^{\mathfrak{f}}$ d'arité n, on note $\Gamma(f^{\mathcal{M}}) \subseteq M^{n+1}$ le graphe de la fonction $f^{\mathcal{M}}$. Si $n = 0$, $\Gamma(f^{\mathcal{M}}) = \{f^{\mathcal{M}}\}$. Le rôle principal des primitives de $\mathcal{M}$ est d'engendrer la famille des *ensembles définissables*. Pour définir cette famille d'ensembles, on doit définir d'abord la famille des ensembles *0-définissables* ou d'ensembles définissables *sans paramètres*. Cette deuxième famille correspond à la plus petite famille définie par :

(D1) pour chaque $R \in \mathcal{L}^{\mathfrak{r}}$, $R^{\mathcal{M}}$ est 0-définissable ;

(D2) pour chaque $f \in \mathcal{L}^{\mathfrak{f}}$, $\Gamma(f^{\mathcal{M}})$ est 0-définissable ;

(D3) pour tout paire d'éléments distincts $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, la diagonale

$$\Delta_{ij}^k := \{(x_1, \ldots, x_k) \in M^k : x_i = x_j\}$$

est 0-définissable.

(D4) si $X, Y \subseteq M^k$ sont 0-définissables, alors le sont aussi $X \cup Y$ et $M^k \setminus X$;

(D5) si $X \subseteq M^k$ et $Y \subseteq M^l$ sont 0-définissables, alors leur produit $X \times Y$ l'est aussi ;

(D6) si $X \subseteq M^{k+l}$ est 0-définissable et $\pi : M^{k+l} \to M^k$ est la projection sur les premières k-coordonnées, alors $\pi(X)$ est 0-définissable.

Étant donné un sous-ensemble $A \subseteq M$, un ensemble X est *A-définissable* ou *définissable à paramètres dans* A, si X est 0-définissable dans la $\mathcal{L}(A)$-structure $\mathcal{M}_A$. Finalement, un ensemble X est *définissable* s'il est M-définissable, c'est-à-dire, 0-définissable dans la $\mathcal{L}(M)$-structure $\mathcal{M}_M$. Si un ensemble X est A-définissable on appelle A un ensemble de paramètres pour X. Notons que 0-définissable correspond aussi à être $\emptyset$-définissable (notation qui s'utilise aussi souvent).

Exemples 2.1.

(1) Soit $\mathcal{L}$ le langage vide (aucune relation, aucune fonction) et considérons la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M} = \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ est lui-même 0-définissables car c'est la projection sur la première coordonnée de la diagonale sur $\mathbb{R}^2$ (donc on utilise (D3) et (D6)). Par (D4), l'ensemble vide est aussi 0-définissable et par (D5) le sont aussi toutes les puissances $\mathbb{R}^n$. Avec un peu de temps on peut se convaincre que tout ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est 0-définissable si et seulement si il est de la forme :

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j, x_k \neq x_l, (i, j) \in A, (k, l) \in B\},$$

pour $A, B \subseteq \{1, \ldots, n\}^2$ disjoints et tel que A est de plus une relation d'équivalence. En particulier, les seules ensembles 0-définissables de $\mathbb{R}^1$, sont le vide et $\mathbb{R}$ lui même. Donc ni $\{0\}$ ni $\{1\}$ sont 0-définissables. Par contre, par définition, $\{0\}$ (et tout $\{r\}$ pour $r \in \mathbb{R}$) est *définissable*. La même description s'applique à n'importe quel ensemble M vu comme $\mathcal{L}$-structure.

(2) Considérons maintenant $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, 0, 1, -, +, \cdot)$, c'est-à-dire, $\mathbb{R}$ en tant que $\mathcal{L}_A$-structure. Trivialement, $\{0\}$ et $\{1\}$ sont 0-définissables. Rien que montrer que $\{2\}$ est 0-définissable est déjà un peu sportif (bien que simple). Voilà une façon. Considérons $X = \Gamma(+)$ est $Y = X \times \{1\}$ qui sont 0-définissables par (D2) et (D5). Par (D4) et (D3)

$$Y \cap \Delta_{1,4}^4 \cap \Delta_{2,4}^4 = \{(1, 1, 2, 1)\},$$

est 0-définissable. Finalement

$$\mathbb{R} \times \{(1, 1, 2, 1)\} \cap \Delta_{1,4}^5 = \{(2, 1, 1, 2, 1)\},$$

et par (D6) la projection dans la première coordonnée $\{2\}$ est 0-définissable.

Une grande partie de l'étude modèle-théorique d'une structure $\mathcal{M}$ cherche à donner une description plus explicite des ensembles définissables (ou 0-définissables) de $\mathcal{M}$. En général, cet objectif ne peut pas être toujours atteint même quand on se restreint aux ensembles 0-définissables d'une structure. C'est le cas, entre autres, de l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$ vu en tant que $\mathcal{L}_A$-structure $(\mathbb{Z}; 0, 1, -, +, \cdot)$ (voir par exemple [2] chapitre 6). Néanmoins, différentes structures admettent une description explicite de ses ensembles définissables nous fournissant des informations supplémentaires sur la structure (même dans le langage des anneaux). L'exemple classique c'est celui du corps complexe $\mathcal{M} = (\mathbb{C}; 0, 1, -, +, \cdot)$. Notons (exercice) qu'inclure une primitive pour l'inverse multiplicative ${}^{-1} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ étendu à $\mathbb{C}$ en déclarant $0^{-1} = 0$, ne rajoute pas des nouveaux ensembles 0-définissables. Le théorème de Chevalley-Tarski caractérise les ensembles 0-définissables de cette structure comme des unions finies d'ensembles de la forme

$$(*) \qquad \{a \in \mathbb{C}^n : P_1(a) = \cdots = P_m(a) = 0, Q(a) \neq 0\},$$

avec $P_1, \ldots, P_m, Q \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$. Étant donné un sous-corps $A \subseteq \mathbb{C}$, la même description s'applique pour les ensembles A-définissables, prenant les polynômes à coefficients dans A. Ainsi, les ensembles définissables de $\mathcal{M}$ sont des unions finies comme dans $(*)$ prenant des polynômes à coefficients complexes. Autrement dit, les ensembles définissables de $(\mathbb{C}; 0, 1, -, +\cdot)$ correspondent aux ensembles *constructibles* de l'algèbre commutative. On démontrera en détails ce résultat dans le dernier chapitre.

L'exemple deux dans les exemples précédentes montre la difficulté de travailler avec la définition d'ensemble définissable (et 0-définissable) qu'on vient de donner. On donnera par la suite une deuxième façon de définir les ensembles définissables à travers des formules qui sera beaucoup plus convenable. Il y a bien sûr un prix a payer qui consiste à bien définir qu'est-ce que c'est qu'une formule pour un langage donné (cela reste toujours un peu technique et parfois ennuyeux). Informellement, le lien avec les formules est facile à voir quand on remarque que chaque opération donné par (D3)-(D5) dans la définition d'ensemble 0-définissable a une contre-partie par des "opérations logiques" classiques. Plus précisément, considérons deux "conditions" ou "formules" $\varphi(x), \psi(x)$ où x est une variable qui varie dans M^n et les ensembles

$$X = \{x \in M^n : \phi(x) \text{ est satisfaite par } x\} \text{ et } Y = \{x \in M^n : \psi(x) \text{ est satisfaite par } x\}.$$

On remarque que les opérations logiques classiques sur ϕ et ψ ont les contreparties suivantes :

(C1) $\{x \in M^n : \neg\phi(x) \text{ est satisfaite par } x\} = M \setminus X$

(C2) $\{x \in M : \phi(x) \vee \psi(x) \text{ est satisfaite par } x\} = X \cup Y$

(C3) $\{x \in M : \phi(x) \wedge \psi(x) \text{ est satisfaite par } x\} = X \cap Y$. Notons de plus que $\phi(x) \wedge \psi(x)$ et $\neg(\neg\phi(x) \vee \neg\psi(x))$ définissent le même ensemble.

De plus, si y est une variable qui varie sur M^m et $\theta(x, y)$ est une condition sur x et y qui défini un ensemble $Z \subseteq M^{n+m}$, alors

(C4) $\{x \in M^n : \exists y \theta(x, y) \text{ est satisfaite par } x\}$ est égal à $\pi(Z) \subseteq M^n$, où $\pi : M^{n+m} \to M^n$ est la projection sur les premières n coordonnés.

(C5) $\{x \in M^n : \forall y \theta(x, y) \text{ est satisfaite par } x\}$ correspond à l'ensemble

$$\{x \in M^n : \{x\} \times M^m \subseteq Z\}.$$

Notons aussi que $\forall y\theta(x)$ et $\neg\exists\neg\theta(x,y)$ définissent le même ensemble.

En particulier, si X, Y et Z sont 0-définissables, par (D3)-(D5) le sont aussi les ensembles décrits dans (C1)-(C5). Dans ce qui suit on définit formellement les formules d'un langage $\mathcal{L}$ pour faire ce lien correctement.

2.2. **Syntaxe.** Dans cette section on introduit la *syntaxe* (variables, termes, formules) qui nous servira pour donner un deuxième point de vue des ensembles définissables. Toute cette section sera basée sur quelques notions sur les "mot d'un alphabet" et des sous-ensembles de mots dites des "mots admissibles" qu'on introduit dans l'annexe. Cela nous permettra faire des récurrences sur la "complexité" ou la "hauteur" des mots admissibles. Toutes ces notions et les démonstrations qui donnent un sens précis à des telles récurrences sont présentés dans l'annexe. Le lecteur qui n'as jamais vu une preuve de cette forme devrait lire tout d'abord cet annexe.

Dans le reste du texte $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ désigneront des $\mathcal{L}$-structures, sauf mention explicite du contraire.

2.2.1. *Variables et termes.* On suppose avoir à disposition un ensemble infini $\mathrm{Var}_{\mathcal{L}}$ de symboles appelés *variables de* $\mathcal{L}$ différents de tout symbole de $\mathcal{L}$. Une multivariable de $\mathcal{L}$ est un uplet $x = (x_i)_{i\in I}$ de variables distinctes $x_i \in \mathrm{Var}_{\mathcal{L}}$. La taille de l'indice I est appelé la taille de x, est on le note souvent $|x|$. Sauf mention du contraire I sera un ensemble fini. Les multivariables $x = (x_i)_{i\in I}$ et $y = (y_j)_{j\in J}$ sont disjointes si $x_i \neq y_j$ pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$. Par la suite x et y désignerons des multivariables de $\mathcal{L}$, sauf mention du contraire.

On définit les *termes de* $\mathcal{L}$ (ou $\mathcal{L}$-termes) comme les mots t sur l'alphabet $\mathcal{L}^{\mathfrak{f}} \cup \mathrm{Var}_{\mathcal{L}}$ de la forme

(T1) $t = x$ avec $x \in \mathrm{Var}_{\mathcal{L}}$;

(T2) $t = c$ avec c un symbole de constante de $\mathcal{L}$;

(T3) $t = ft_1 \cdots t_n$ où $f \in \mathcal{L}^{\mathfrak{f}}$ est d'arité $n > 0$ et $t_1, \ldots, t_n$ sont des $\mathcal{L}$-termes.

On omettra la mention '$\mathcal{L}$' dans $\mathcal{L}$-termes quand le langage est claire dans le contexte. Les termes sont aussi les mots admissibles (voir annexe) en définissant le poids d'une variable comme la valeur 0 et le poids d'un symbole de fonction $f \in \mathcal{L}^{\mathfrak{f}}$ comme l'arité de f. Cela nous donne un résultat d'écriture unique :

Lemme 2.2. *Tout $\mathcal{L}$-terme est ou bien une variable de $\mathcal{L}$, ou bien un symbole de constante de $\mathcal{L}$, ou bien égal a un mot $ft_1 \cdots t_n$ pour une unique uplet $(f, t_1, \ldots, t_n)$ avec $f \in \mathcal{L}^{\mathfrak{f}}$ d'arité $n > 0$ et chaque t_i un $\mathcal{L}$-terme pour $i = 1, \ldots, n$.*

Comme on l'explique dans l'Annexe l'écriture unique nous permet de faire des preuves par récurrence *sur la complexité des termes.* Comme exemple, on définit *l'ensemble $V(t)$ des variables d'un $\mathcal{L}$-terme t* par récurrence sur la complexité de t comme suit :

(1) si t est une variable x de $\mathcal{L}$, alors $V(t) = \{x\}$.

(2) si t est un symbole de constante de $\mathcal{L}$, alors $V(t) = \emptyset$.

(3) si $t = ft_1 \cdots t_n$ où $f \in \mathcal{L}^{\mathfrak{f}}$ est d'arité $n > 0$, $V(t) = \bigcup_{i=1}^{n} V(t_i)$.

On écrira souvent $f(t_1,\dots,t_n)$ au lieu de $ft_1\cdots t_n$ pour garder l'intuition dans la notation. Par exemple dans le langage des anneaux $\mathcal{L}_A$, on notera $(x+(-y))\cdot z$ au lieu de $\cdot + x - yz$; et même quand il n'y a pas de confusion on écrira $(x-y)z$ en sachant que $-$ n'est pas un symbol de fonction d'arité 2 dans $\mathcal{L}_A$ mais d'arité 1.

Soit $x=(x_i)_{i\in I}$ une multivariable. Un $(\mathcal{L},x)$-terme est une paire (t,x) où t est un $\mathcal{L}$-terme tel que chaque variable dans $V(t)$ est une variable de x. On écrit un tel $(\mathcal{L},x)$-terme par $t(x)$. Notons qu'il n'est pas requis que chaque variable de x soit une variable dans $V(t)$ (la notation est similaire aux cas des polynômes où $P(X)\in\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$ ne doit pas contenir nécessairement toutes les indéterminées $X_1,\dots,X_n$). On définit une fonction $t^{\mathcal{M}}:M^I\to M$ associée au terme $t(x)$, de la façon suivante : pour $a=(a_i)\in M^I$

(1) si $t=x_i$, alors $t^{\mathcal{M}}(a):=a_i$;

(2) si $t=c$ un symbole de constante, alors $t^{\mathcal{M}}(a):=c^{\mathcal{M}}$;

(3) si $t=ft_1\cdots t_n$ avec $f\in\mathcal{L}^{\mathfrak{f}}$ d'arité n et $t_i=t_i(x)$ un $\mathcal{L}$-terme pour $i=1,\dots,n$, alors
$$t^{\mathcal{M}}(a):=f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(a),\dots,t_n^{\mathcal{M}}(a))\in M.$$

Exemple 2.3. Soit R un anneau commutatif vu en tant que $\mathcal{L}_A$-structure. Soit $t(x,y,z)$ le $\mathcal{L}_A$-terme $(x-y)z$. La fonction $t^R:R^3\to R$ n'est rien d'autre que la fonction qui envoie $(a,b,c)\in R$ sur $(a-b)c$. En fait, pour chaque $\mathcal{L}_A$-terme $t(x_1,\dots,x_n)$ il y a un (unique) polynôme $P^t(X_1,\dots,X_n)$ à coefficients entiers tel que pour tout anneau commutatif R on a que $t^R(a)=P^t(a)$ pour tout $a\in R^n$. Inversement, pour chaque polynôme $P\in\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$ il y a un $\mathcal{L}_A$-terme $t(x_1,\dots,x_n)$ tel que $t^R(a)=P(a)$ pour tout anneau commutatif R et tout $a\in R^n$.

Exercice 2.4. Soit $t(x)$ un $\mathcal{L}$-terme, $a\in M^{|x|}$ et $h:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ un morphisme. Alors
$$h(t^{\mathcal{M}}(a))=t^{\mathcal{N}}(h(a)),$$
en particulier $t^{\mathcal{M}}(a)=t^{\mathcal{N}}(a)$ si $M\subseteq N$. (Utilisez la récurrence dans la complexité des termes.)

On peut aussi montrer aisément que si $\mathcal{L}'$ est une extension de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}'$ est une $\mathcal{L}'$-expansion de $\mathcal{M}$, alors chaque $\mathcal{L}$-terme $t(x)$ est aussi un $\mathcal{L}'$-terme et $t^{\mathcal{M}}=t^{\mathcal{M}'}$. Notons qu'un terme t n'ayant pas de variables, c'est-à-dire $V(t)=\emptyset$, définit un élément $t^{\mathcal{M}}\in M$, les symboles de constantes étant un cas particulier.

2.2.2. *Sous-structure engendrée.* . Supposons que $\mathcal{L}$ contient au moins un symbole de constante. Pour $A\subseteq M$, on définit
$$\langle A\rangle_{\mathcal{M}}:=\{t^{\mathcal{M}}(a):t(x)\text{ un }\mathcal{L}\text{-terme},a\in A^{|x|}\}.$$
On suppose que $\mathcal{L}$ contient au moins un symbole de constante pour que $\langle A\rangle_{\mathcal{M}}$ ne soit jamais vide. Le lemme suivant montre que $\langle A\rangle_{\mathcal{M}}$ est la plus petite sous-structure de $\mathcal{M}$ contenant A.

Lemme 2.5. *$\langle A\rangle_{\mathcal{M}}$ est l'ensemble de base d'une sous-structure de $\mathcal{M}$. De plus, étant donné une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{N}$ et une application $h:A\to N$, il existe au plus une extension de h à un morphisme $\langle A\rangle_{\mathcal{M}}\to\mathcal{N}$. En particulier, $\langle A\rangle_{\mathcal{M}}$ correspond à la plus petite sous-structure de $\mathcal{M}$ qui contient A.*

Démonstration. Pour monter que l'ensemble $\langle A\rangle_{\mathcal{M}}$ est l'ensemble de base d'une sous-structure de $\mathcal{M}$ il suffit de montrer qu'il est clos par l'interprétation des symboles de fonction de $\mathcal{L}$. Soit $f \in \mathcal{L}^{\mathfrak{f}}$ d'arité n, $t_i = t_i(x_i)$ des termes avec x_i une multivariable et $a_i \in A^{|x_i|}$ pour $i = 1\ldots,n$. On a bien que pour le terme $t(x_1,\ldots,x_n) := ft_1(x_1)\cdots t_n(x_n)$

$$f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(a_1)\cdots t_n^{\mathcal{M}}(a_n)) = t^{\mathcal{M}}(a_1,\ldots,a_n) \in \langle A\rangle_{\mathcal{M}},$$

ce qui montre que $\langle A\rangle_{\mathcal{M}}$ est clos par $f^{\mathcal{M}}$. Soit $h : A \to N$ une application et supposons qu'il y a deux extensions distinctes $h_1, h_2 : \langle A\rangle_{\mathcal{M}} \to \mathcal{N}$ de h (donc des morphismes). Soit $t(x)$ un terme et $a \in A^{|x|}$ tel que $h_1(t^{\mathcal{M}}(a)) \neq h_2(t^{\mathcal{M}}(a))$. Par l'exercice 2.4, cela implique que $t^{\mathcal{N}}(h_1(a))) \neq t^{\mathcal{N}}(h_2(a)))$, ce qui est contradictoire car $h_1|A = h_2|A]$. Quand $\mathcal{N}$ est une sous-structure de $\mathcal{M}$ qui contient A, alors l'inclusion est un morphisme de $\langle A\rangle_{\mathcal{M}}$ dans $\mathcal{N}$. □

2.2.3. *Symboles logiques.* On fixe maintenant les huit "symboles logiques" de la logique de premier ordre :

$$\top \ \bot \ = \ \neg \ \vee \ \wedge \ \exists \ \forall$$

à être pensées comme *vrai*, *faux*, *égal*, *non*, *ou*, *et*, *il existe*, et *pour tout* , respectivement. Ces symboles sont supposés différents de tout symbole de $\mathcal{L}$ et de $\mathrm{Var}_{\mathcal{L}}$ pour tout langage $\mathcal{L}$. Les symboles $\neg, \vee, \wedge$ sont appelés des *connectives* (ou connectives logiques) et $\exists, \forall$ des *quantificateurs.*

2.2.4. *Formules atomiques de $\mathcal{L}$.* Les *formules atomiques* de $\mathcal{L}$ sont les mots sur l'alphabet

$$\mathcal{L} \cup \mathrm{Var}_{\mathcal{L}} \cup \{\top, \bot, =\},$$

définies par

(A1) $\top$ et $\bot$ sont des formules atomiques ;

(A2) $Rt_1 \ldots t_m$ pour $R \in \mathcal{L}^{\mathfrak{r}}$ d'arité m et $t_1 \ldots, t_m$ des $\mathcal{L}$-termes est une formules atomique ;

(A3) $= t_1t_2$ pour t_1, t_2 des $\mathcal{L}$-termes est une formules atomique.

2.2.5. *Formules.* Les *formules* de $\mathcal{L}$ (ou $\mathcal{L}$-formules) sont les mots sur l'alphabet

$$\mathcal{L} \cup \mathrm{Var}_{\mathcal{L}} \cup \{\top, \bot, =, \neg, \vee, \wedge, \exists, \forall\},$$

définies par

(F1) les formules atomiques de $\mathcal{L}$ sont des formules de $\mathcal{L}$;

(F2) si φ et ψ sont des formules de $\mathcal{L}$, alors le sont aussi $\neg\varphi, \vee\varphi\psi$ et $\wedge\varphi\psi$;

(F3) si φ est une formule de $\mathcal{L}$ et x une variable de $\mathcal{L}$, alors $\exists x\varphi$ et $\forall x\varphi$ le sont aussi.

Comme pour les termes, on omettra la mention de $\mathcal{L}$ quand il n'y a pas de confusion. Étant donné une formule $\varphi = a_1 \cdots a_m$, une sous-formule de φ est un sous-mot $a_i \cdots a_k$ avec $1 \leq i \leq k \leq m$ qui est aussi une formule.

Remarque 2.6.

(1) Comme pour les termes, étant donné deux formules φ et ψ, on utilisera $\varphi \vee \psi$ et $\varphi \wedge \psi$ au lieu de $\vee\varphi\psi$ et $\wedge\varphi\psi$ pour avoir une lecture plus facile des formules. On se permettra aussi l'usage des parenthèses pour clarifier la forme cachée dans la notation en préfixe. De façon analogue, on écrira $t_1 = t_2$ au lieu de $= t_1t_2$, et sa négation $t_1 \neq t_2$ au lieu de $\neg = t_1t_2$.

(2) De même, on utilisera les notations classiques pour l'implication $\varphi \rightarrow \psi$ qui dénote $\neg\varphi \vee \psi$ et pour la double implication $\varphi \leftrightarrow \psi$ qui dénote $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

(3) Soit $\mathcal{F}_{at}$ l'ensemble de formule atomiques. Souvent on donnera des définitions et on fera des preuves par récurrence sur la complexité d'une formule. Pour que cela ait en sens, on traitera les $\mathcal{L}$-formules comme les mots admissibles sur l'alphabet

$$\mathcal{F}_{at} \cup \{\neg, \vee, \wedge\} \cup \{\exists x : x \in \mathrm{Var}_{\mathcal{L}}\} \cup \{\forall x : x \in \mathrm{Var}_{\mathcal{L}}\},$$

ayant comme fonction d'arité

$$\begin{cases} \text{l'arité de toute formule atomique est } 0 \\ \text{l'arité de } \neg, \exists x, \forall x \text{ est } 1 \text{ pour toute variable } x \in \mathrm{Var}_{\mathcal{L}} \\ \text{l'arité de } \vee, \wedge \text{ est } 2. \end{cases}$$

La définition suivante est un exemple de définition par récurrence sur la complexité des formules.

Définition 2.7. On définit l'ensemble $VL(\varphi)$ des variables libres d'une formule φ par récurrence sur la complexité de φ comme suit. Pour φ une formule atomique :

(1) si $\varphi = \top$ ou $\varphi = \bot$, alors $VL(\varphi) = \emptyset$

(2) si $\varphi = Rt_1 \cdots t_n$ avec $R \in \mathcal{L}^{\mathrm{r}}$ d'arité n et t_i des termes pour $i = 1, \ldots, n$, alors $VL(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{n} V(t_i)$.

(3) si φ est $= t_1 t_2$, avec t_1, t_2 des termes, alors $VL(\varphi) = V(t_1) \cup V(t_2)$.

Maintenant l'étape inductive :

(1) $VL(\neg\varphi) = VL(\varphi)$;

(2) $VL(\varphi \wedge \psi) = VL(\varphi \vee \psi) = VL(\varphi) \cup VL(\psi)$;

(3) $VL(\exists x\varphi) = VL(\forall x\varphi) = VL(\varphi) \setminus \{x\}$.

Exemple 2.8. Considérons la $\mathcal{L}_A$-formule $\exists x(x \cdot y = 1) \wedge x = 0$. Écrite sous forme préfixe, elle correspond au mot $\wedge\exists x = \cdot xy1 = x0$. L'ensemble des variables libres de cette formule est $\{x, y\}$ même si la formule contient $\exists x$. Par contre, les variables libres de la sous-formule $\exists x(x \cdot y = 1)$ est $\{y\}$. Une occurrence d'une variable x dans une formule φ sera dite libre si elle ne fait pas partie d'une sous-formule de φ qui commence par $\exists x$ ou par $\forall x$. Par exemple, les deux premières occurrences de x dans la formule d'en haut ne sont pas libres, mais la troisième l'est. La seule occurrence de la variable y est libre. Notons que la définition d'occurrence libre d'une variable s'applique à l'écriture en préfixe de la formule.

De manière similaire aux termes, étant donné une multivariable x on définit une $(\mathcal{L}, x)$-formule comme la paire (φ, x) avec φ une $\mathcal{L}$-formule telle que toutes les variables libres de φ sont des variables de x. Un *$\mathcal{L}$-énoncé* est une $\mathcal{L}$-formule n'ayant pas de variables libres. Un *$\mathcal{L}$-énoncé atomique* est un $\mathcal{L}$-énoncé qui de plus est une formule atomique. Notons que l'ensemble de tous les énoncés de $\mathcal{L}$ et celui de toutes les formules de $\mathcal{L}$ sont tous les deux de taille $|\mathcal{L}|$.

⚠ Le lecteur doit distinguer les différents manières dont on utilise le symbol $=$. Parfois il dénote un des huit symboles logiques, mais on l'utilise aussi pour indiquer l'égalité des objets mathématiques de la façon usuelle. Le contexte devrait toujours mettre en évidence l'usage sans devoir le dire explicitement.

2.3. **Substitution.** Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ une multivariable, $t(x)$ un $\mathcal{L}$-terme, $\varphi(x)$ une $\mathcal{L}$-formule et $s_1, \dots s_n$ des termes. On définit

- $t(s)$: le mot obtenu en remplaçant chaque occurrence de la variable x_i par s_i de façon simultanée dans $t(x)$.
- $\varphi(s)$: le mot obtenu en remplaçant chaque occurrence libre de la variable x_i par s_i de façon simultanée dans $\varphi(x)$.

On laisse le lecteur se convaincre que $t(s)$ est bien un $\mathcal{L}$-terme et que $\varphi(s)$ est un effet une $\mathcal{L}$-formule. Notons en particulier que si aucun des s_i a des variables, alors $\varphi(s)$ est un $\mathcal{L}$-énoncé.

Pour $A \subseteq M$, regardons en détail le cas particulier de la substitution dans l'expansion de $\mathcal{M}$ au langage $\mathcal{L}(A)$. Trivialement tout $\mathcal{L}$-terme $t(x)$ est aussi un $\mathcal{L}(A)$-terme et toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x)$ est aussi une $\mathcal{L}(A)$-formule. Donc, pour $a \in A^n$, $t(a)$ correspond au $\mathcal{L}(A)$-terme obtenu en remplaçant chaque occurrence de la variable x_i par a_i de façon simultanée dans $t(x)$. Notons ici qu'on utilise l'uplet a de façon ambigüe pour des éléments de A et pour des symboles de constantes dans le langage $\mathcal{L}(A)$. De même, la formule $\varphi(a)$ correspond à la $\mathcal{L}(A)$-formule obtenue en remplaçant chaque occurrence libre de la variable x_i par a_i de façon simultanée dans $\varphi(x)$. En particulier $\varphi(a)$ est un $\mathcal{L}(A)$-énoncé car elle ne contient plus de variables libres, ces dernières ayant étés remplacées par des constantes.

Remarque 2.9. Soit $\varphi(x)$ une $\mathcal{L}(A)$-formule. Seulement un nombre fini d'éléments de A apparaissent en tant que constantes dans cette formule. Donc il existe une $\mathcal{L}$-formule $\psi(x, y)$ avec y une multivariable disjointe de x et un uplet $a \in A^{|y|}$ tels que $\varphi(x) = \psi(x, a)$ en tant que $\mathcal{L}(A)$-formules.

Pour les termes l'exercice suivant montre le lien entre la substitution dans $\mathcal{L}(M)$ et la fonction induite par un terme dans une structure :

Exercice 2.10. Soit $x = (x_i)_{i \in I}$ une multivariable, $t(x)$ un $\mathcal{L}$-terme et $a = (a_i) \in M^I$. Alors

$$t^{\mathcal{M}}(a) = t(a)^{\mathcal{M}_M}.$$

2.4. **Satisfaction et définissabilité.** On peut finalement définir la relation principale de cette section entre $\mathcal{L}$-structures et $\mathcal{L}$-énoncés

$$\mathcal{M} \models \varphi,$$

qu'on lit comme "$\mathcal{M}$ satisfait φ ou "φ est vrai dans M". On écrira $\mathcal{M} \not\models \varphi$ pour dire que $\mathcal{M}$ et φ ne sont pas en relation par rapport à $\models$. Pour définir cette relation on a besoin de faire le passage à l'expansion canonique $\mathcal{M}_M$ de $\mathcal{M}$ dans le langage $\mathcal{L}(M)$. On définira donc d'abord la relation $\mathcal{M}_M \models \varphi$ pour les $\mathcal{L}(M)$-énoncés et on récupérera la relation pour notre structure de départ $\mathcal{M}$ en posant pour un $\mathcal{L}$-énoncé ψ :

$$\mathcal{M} \models \psi \text{ si et seulement si } \mathcal{M}_M \models \psi.$$

Notons qu'une fois la relation $\mathcal{M}_M \models \varphi$ est définie, le passage à $\mathcal{M}$ nous est imposé. En effet, si ψ est un $\mathcal{L}$-énoncé, être vrai ou faux dans $\mathcal{M}_M$ ne devrait dépendre que de la $\mathcal{L}$-structure de $\mathcal{M}_M$ qui correspond précisément à $\mathcal{M}$. Remarquons que si une formule $Rt_1 \dots t_m$ est un $\mathcal{L}(M)$-énoncé cela implique que les termes t_i ne contiennent pas de variables et, par conséquence, ils définissent un $(t_1^{\mathcal{M}_M}, \dots, t_m^{\mathcal{M}_M}) \in M^m$. De même pour un

$\mathcal{L}(M)$-énoncé de la forme '$= t_1t_2$'. Voici donc la définition par récurrence sur les $\mathcal{L}(M)$-énoncés de la relation $\mathcal{M}_M \models \varphi$:

(V1) $\mathcal{M}_M \models \top$ et $\mathcal{M}_M \not\models \perp$;

(V2) $\mathcal{M}_M \models Rt_1 \dots t_m$ si et seulement si $(t_1^{\mathcal{M}_M}, \dots, t_m^{\mathcal{M}_M}) \in R^{\mathcal{M}_M}$, pour $R \in \mathcal{L}^{\mathfrak{r}}$ d'arité m et $t_1, \dots, t_m$ des $\mathcal{L}(M)$-termes sans variables ;

(V3) $\mathcal{M}_M \models = t_1t_2$ si et seulement si $t_1^{\mathcal{M}_M} = t_2^{\mathcal{M}_M}$, pour t_1, t_2 des $\mathcal{L}(M)$-termes sans variables.

Pour φ et ψ des $\mathcal{L}(M)$-énoncés pour lesquels on a déjà définit la relation de satisfaction,

(V4) $\mathcal{M}_M \models \neg\varphi$ si et seulement si $\mathcal{M}_M \not\models \varphi$,

(V5) $\mathcal{M}_M \models \varphi \vee \psi$ si et seulement si $\mathcal{M}_M \models \varphi$ ou $\mathcal{M}_M \models \psi$.

(V6) $\mathcal{M}_M \models \varphi \wedge \psi$ si et seulement si $\mathcal{M}_M \models \varphi$ et $\mathcal{M}_M \models \psi$.

(V7) $\mathcal{M}_M \models \exists x\varphi$ si et seulement $\begin{cases} \text{il existe } a \in M \text{ tel que } \mathcal{M}_M \models \varphi(a) & \text{si } x \in VL(\varphi) \\ \mathcal{M}_M \models \varphi & \text{si } x \notin VL(\varphi) \end{cases}$

(V8) $\mathcal{M}_M \models \forall x\varphi$ si et seulement si $\begin{cases} \text{pour tout } a \in M,\ \mathcal{M}_M \models \varphi(a) & \text{si } x \in VL(\varphi) \\ \mathcal{M}_M \models \varphi & \text{si } x \notin VL(\varphi) \end{cases}$.

Le passage au langage $\mathcal{L}(M)$ et à l'expansion $\mathcal{M}_M$ est nécessaire pour définir les quantificateurs dans (T7) et (T8). Pour simplifier la notation, étant donné une $\mathcal{L}(A)$-énoncé $\varphi(a)$, on se permettra parfois la notation $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ pour dénoter $\mathcal{M}_M \models \varphi(a)$ quand il n'y a pas de confusion.

2.5. **Ensembles définissables II.** On peut donner finalement la deuxième définition d'ensemble définissable :

Définition 2.11. Soit $\varphi(x)$ une $\mathcal{L}$-formule avec $x = (x_1, \dots, x_n)$. On définit l'ensemble

$$\varphi(M) := \{a \in M^n : \mathcal{M}_M \models \varphi(a)\}.$$

Soit $X \subseteq M^n$ et $A \subseteq M$. On dit que X est *0-définissable* s'il y a une $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x)$ telle que $X = \varphi(M)$; X est A-définissable s'il existe une $\mathcal{L}(A)$-formule $\varphi(x)$ telle $X = \varphi(M)$; en fin, X est définissable s'il est M-définissable.

Il n'est pas difficile de se convaincre que cette définition d'ensemble définissable coïncide avec celle qu'on a donné dans la Section 2.1, notamment, en utilisant les correspondances (C1)-(C5) énoncés dans cette même section. L'avantage qu'on gagne c'est de pouvoir associer à chaque ensemble définissable une $\mathcal{L}(M)$-formule (pas nécessairement unique) qui le définit. Cela nous donne entre autres une méthode pour montrer qu'un ensemble est définissable, à savoir, celle d'exhiber une formule qui le définit.

Exemples 2.12. Soit $\mathcal{M} = (\mathbb{R}; \mathcal{L}_A)$, donc les nombres réels comme structure dans le langage des anneaux.

(1) Montrer que l'ensemble $\{2\}$ est $\emptyset$-définissable est beaucoup facile avec une formule. En effet, pour la formule $\varphi(x) :=$ '$1 + 1 = x$' on voit bien que $\varphi(\mathbb{R}) = \{2\}$.

(2) Un peut plus exotique, on peut montrer que $\{\sqrt{2}\}$ est $\emptyset$-définissable en utilisant la formule

$$\varphi(x) := \text{'}x \cdot x = 1 + 1 \wedge \exists y(x = y \cdot y)\text{'}.$$

(3) L'ensemble $\{a \in \mathbb{R} : a \leq \pi\}$ est définissable. On utilise la formule :

$$\varphi(x) := `\wedge \exists y(\pi - x = y \cdot y)',$$

qui est une $\mathcal{L}(\mathbb{R})$-formule ! Par contre, cet ensemble n'est pas $\emptyset$-définissable, mais cela n'est pas encore facile à démontrer. Ça découlera d'une caractérisation des ensembles 0-définissables de $\mathcal{M}$ qu'on donnera vers la fin du dernier chapitre.

(4) On muni $\mathbb{R}^m$ de la topologie induit par l'ordre (la topologie standard de $\mathbb{R}$). On montre que si $X \subseteq \mathbb{R}^m$ est 0-définissable dans cette structure alors l'intérieur $\mathrm{int}(X)$ de X l'est aussi. Il faut juste se rendre compte de l'équivalence entre

$$x \in \mathrm{int}(X) \Leftrightarrow \exists u \exists v((u < x < v) \wedge \neg \exists y((u < y < v) \wedge y \notin X),$$

où u, v, x, y varient sur $\mathbb{R}^m$ et $u < x < v$ est une abréviation de

$$u_1 < x_1 < v_1 \text{ et } \cdots \text{ et } u_m < x_m < v_m.$$

La notation ensembliste pour montrer que $\mathrm{int}(X)$ est 0-définissable devient lourde très vite et parfois difficile à comprendre. Les condition données par des formules sont parfois plus proches à la pratique mathématique.

2.6. **Équivalence.** Étant donné une multivariable $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et une $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x)$, on écrit $\exists x \varphi$ et $\forall x \varphi$ (ou même $\exists x \varphi(x)$ et $\forall x \varphi(x)$) comme des abréviations des formules

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \varphi \text{ et } \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi,$$

respectivement. En étend la relation de satisfaction dans $\mathcal{M}$ aux $\mathcal{L}$-formules $\varphi(x)$ par

$$\mathcal{M} \models \varphi \text{ si et seulement si } \mathcal{M} \models \forall x \varphi.$$

On écrit $\models \varphi$ si $\mathcal{M} \models \varphi$ pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$. Deux formules φ, ψ sont *équivalentes* si $\models \varphi \leftrightarrow \psi$. Par exemple, il n'est pas difficile de se convaincre que les formules $\neg \forall x \varphi$ et $\exists x \neg \varphi$ sont équivalentes pour toute formule φ. De même pour les formules $\neg(\varphi \wedge \psi)$ et $\neg \varphi \vee \neg \psi$, pour toutes les formules φ, ψ (qui correspondent aux bien connues lois de De Morgan). Par ailleurs, le fait que $\wedge$ et $\vee$ soient des connectives associatifs et commutatifs peut-être exprimé comme le fait que pour des formules quelconques φ, ψ, θ on a

$$\begin{cases} \models (\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \wedge \theta) \\ \models (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi), \end{cases}$$

et de même en remplaçant $\wedge$ par $\vee$. Cela nous permet d'une fois et pour toutes d'écrire des conjonctions et des disjonctions sans parenthèses. Pour des formules $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ on utilisera aussi la notation suivante pour des conjonctions et des disjonctions :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \text{ abrège } \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \text{ et}$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i \text{ abrège } \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n.$$

Exercice 2.13. Soient φ et ψ deux $\mathcal{L}$-formules équivalentes. Montrer que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ et pour toute $\mathcal{L}$-formule θ, on a

$$\mathcal{M} \models \theta \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \theta(\varphi/\psi),$$

ou $\theta(\varphi/\psi)$ dénote la formule dans la quelle on remplace uniformement dans θ chaque occurrence de φ en tant sous-formule par ψ.

2.7. **Clôture définissable et clôture algébrique.** Soit $A \subseteq M$ et $b \in M$. On dit que b est A-définissable dans $\mathcal{M}$ (où définissable au dessus de A) si $\{b\} \subseteq M$ est A-définissable. On dit que b est A-algébrique dans $\mathcal{M}$ (où algébrique au dessus de A) si $b \in X$ pour un ensemble $X \subseteq M$ fini et A-définissable. On omettra la mention "dans M" quand M est claire dans le contexte. Bien évidement, si un élément b est A-définissable il est aussi A-algébrique. On définit ainsi la clôture définissable et la clôture algébrique de A par :

$$\mathrm{dcl}(A) := \{b \in M : b \text{ est } A\text{-définissable dans } M\},$$
$$\mathrm{acl}(A) := \{b \in M : b \text{ est } A\text{-algébrique dans } M\}.$$

Exercice 2.14. Montrer que la clôture définissable et la clôture algébrique sont des opérateurs de clôture. Un opérateur de clôture est une fonction $\mathrm{cl} : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ qui satisfait pour tout $A, B \subseteq M$:

(1) $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$;
(2) $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A))$;
(3) si $A \subseteq B$, alors $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$.

On dira que A est définissablement clos si $A = \mathrm{dcl}(A)$ et que A est algébriquement clos si $A = \mathrm{acl}(A)$. Pour n'avoir pas de confusion avec la clôture algébrique au sens des corps, acl sera souvent nommé *la clôture algébrique modèle-théorique* (dans certains cas ces deux clôtures coïncident pour le langage des anneaux). Le lemme suivant donne une caractérisation de la clôture définissable très utile.

Lemme 2.15. *Un élément b est A-définissable si et seulement si $f(a) = b$ où $f : X \subseteq M^n \to M$ est une fonction 0-définissable et $a \in A^n$.*

Démonstration. La direction de droite à gauche est triviale, donc supposons que $b \in \mathrm{dcl}(A)$. Soit $\varphi(x)$ un $\mathcal{L}(A)$-formule qui définit l'ensemble $\{b\}$. Soit $a \in A^n$ un uplet contenant toutes l'interprétation de tous les symboles de constante utilisés dans $\varphi(x)$, et $\varphi(x, y)$ la $\mathcal{L}$-formule telle que $\varphi(x) = \varphi(x, a)$. On considère la $\mathcal{L}$-formule :

$$\psi(x, y) := \varphi(x, y) \wedge (\forall z(\varphi(z, y) \to x = z).$$

On remarque que la formule $\psi(x, y)$ définit une fonction f ayant comme domaine l'ensemble

$$X := \{c \in M^{|y|} : \exists x\psi(x, c)\},$$

pour laquelle par définition $f(a) = b$. □

Supposons que $\mathcal{L}$ contient au moins un symbole de constante. Le lemme précédent nous permet de montrer que si $A = \mathrm{dcl}(A)$ où $A = \mathrm{acl}(A)$, alors A est l'ensemble de base d'une sous-structure de $\mathcal{M}$ (il est clos par l'interprétation des fonctions de $\mathcal{L}$). En particulier $\mathrm{dcl}(A)$ et $\mathrm{acl}(A)$ sont des $\mathcal{L}$-sous-structures de $\mathcal{M}$ qui contiennent A et on a que $\langle A\rangle_{\mathcal{M}} \subseteq dcl(A) \subseteq acl(A)$.

Notes et commentaires 1. La définition de la relation de satisfaction est due au célébre papier de Tarski [4] étudié surtout par des philosophes. La définition qu'on a donné ici reste plus proche de Tarski-Vaught [3].

3. Équivalence élémentaire et sous-structures élémentaires

Dans cette section on introduit différentes relations liées à préserver la satisfaction d'un ensemble de formules. Des telles relations sont souvent dites (ou accompagnées de la mention) "élémentaires". Pour cela on définit dans une première partie quelques ensembles de formules dont on aura besoin plus tard. Dans toute la section $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ désigneront des $\mathcal{L}$-structures.

3.1. **Formules d'une forme spéciale.** Une formule est sans quantificateurs si, comme son nom suggère, elle ne contient pas d'occurrence ni de $\exists$ ni de $\forall$. Une formule est dite existentielle (ou $\exists$-formule) si elle est de la forme $\exists x\varphi$ avec x une multivariable et φ une formule sans quantificateurs. De même, Une formule est dite universelle (ou $\forall$-formule) si elle est de la forme $\forall x\varphi$ avec x une multivariable et φ une formule sans quantificateurs. Si φ est une $\forall$-formule, alors $\neg\varphi$ est équivalente à une $\exists$-formule, et de façon analogue lorsqu'on échange "$\forall$" et "$\exists$". Une formule est dite universelle-existentielle (ou '$\forall\exists$-formule) si elle est de la forme $\forall x\exists y\varphi$ avec x, y des multivariables disjointes et φ sans quantificateurs.

Lemme 3.1. *Si φ, ψ sont des $\exists$-formules, alors $\varphi \wedge \psi$ et $\varphi \vee \psi$ sont équivalentes à des $\exists$-formules. De façon analogue pour $\forall$ et pour $\forall\exists$.*

Démonstration. La preuve n'est pas difficile mais relève une observation souvent oubliée. Soit $\varphi = \exists x\rho$ et $\psi = \exists y\theta$ des formules avec ρ, θ sans quantificateurs. Si x, y sont des multivariables disjointes, alors $\varphi \wedge \psi$ et $\exists x\exists y(\rho \wedge \theta)$ sont équivalentes. Hélas, si x et y ne sont pas disjointes, il n'est pas difficile de construire des exemples pour lesquels $\varphi \wedge \psi$ et $\exists x(\rho \wedge \theta)$ ne soient pas équivalentes. Par exemple, si l'on prends $|x| = |y| = 1$ et $x = y$, pour les $\mathcal{L}_G$-formules

$$\rho := x = 1 \text{ et } \theta := x \neq 1,$$

on a que tout groupe non-trivial G en tant que $\mathcal{L}_G$-structure satisfait $G \models \exists x(x = 1) \wedge \exists x(x \neq 1)$, mais ne satisfait pas $G \models \exists x\exists x(x = 1 \wedge x \neq 1)$. La seule chose qu'on a à faire c'est de changer les variables pour forcer qu'elle soient disjointes. On choisit des multivariables z disjointes de x, et dans ce cas $\varphi \wedge \psi$ reste bien équivalente à $\exists x\exists y(\rho \wedge \theta(y/z))$. La même preuve s'applique pour les formules universelles. $\square$

De façon analogue, on peut définir les $\forall\exists\forall$-formules et ainsi de suite pour toutes les alternances entre $\exists$ et $\forall$. On s'intéresse à des formules de cette forme la grâce au lemme suivant qu'on laisse comme exercice.

Lemme 3.2 (Forme prénexe)**.** *Toute $\mathcal{L}$-formule φ est équivalente à une $\mathcal{L}$-formule ψ sous forme prénexe, c'est-à-dire, de la forme*

$$Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\theta,$$

où chaque Q_i est un quantificateur (soit $\exists$ soit $\forall$) est θ est une $\mathcal{L}$-formule sans quantificateurs.

Il y a des logiciens qui s'intéressent à une notion de complexité pour une formule φ qui correspond au plus petit entier n tel que φ est équivalente à une formule sous-forme prénexe avec n alternances entre de quantificateurs. Cette notion de complexité entraîne une *hiérarchie récursive* beaucoup étudiée par les informaticiens théoriques.

3.2. **Préservation des formules.** Soient $A \subseteq M$ et $h : A \to N$. Soit $\varphi(x)$ une formule avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$. On dit que h préserve la formule $\varphi(x)$ si pour tout $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$

$$\mathcal{M}_M \models \varphi(a) \Rightarrow \mathcal{N}_N \models \varphi(h(a)),$$

Pour un ensemble de formules F, on dit que h préserve les formules de F si h préserve chaque formule de F. Le lemme suivant caractérise les morphismes et les plongements par rapport à la préservation de certaines formules.

Lemme 3.3. *On suppose $A = M$. Alors*

(1) h est un morphisme si et seulement si h préserves des formules atomiques ;

(2) h est un plongement si et seulement si h préserves des formules sans quantificateurs.

Démonstration. Soit $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un morphisme, $\varphi(x)$ une formule atomique et $a \in A^{|x|}$. Le résultat est trivial pour $\top$ et $\bot$, donc il nous restent deux cas. Le premier c'est $\varphi :=$ '$Rt_1(x) \cdots t_n(x)$' pour $R \in \mathcal{L}^{\mathfrak{r}}$ d'arité n et $t_i(x)$ un terme pour $i = 1, \ldots, n$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_M \models \varphi(a) &\Rightarrow (t_1(a)^{\mathcal{M}_M}, \ldots, t_n(a)^{\mathcal{M}_M}) \in R^{\mathcal{M}} \\ &\Rightarrow (t_1^{\mathcal{M}}(a), \ldots, t_n^{\mathcal{M}}(a)) \in R^{\mathcal{M}} \text{ (exercice 2.10)} \\ &\Rightarrow (h(t_1^{\mathcal{M}}(a)), \ldots, h(t_n^{\mathcal{M}}(a))) \in R^{\mathcal{N}} \text{ (déf. de morphisme)} \\ &\Rightarrow (t_1^{\mathcal{N}}(h(a)), \ldots, t_n^{\mathcal{N}}(h(a))) \in R^{\mathcal{N}} \text{ (exercice 2.4)} \\ &\Rightarrow (t_1(a)^{\mathcal{N}_N}, \ldots, t_n(a)^{\mathcal{N}_N}) \in R^{\mathcal{N}} \text{ (exercice 2.10)} \\ &\Rightarrow \mathcal{N}_N \models Rt_1(h(a)) \cdots t_n(h(a)). \end{aligned}$$

Le deuxième cas c'est $\varphi :=$ '$t_1(x) = t_2(x)$' pour t_1, t_2 des termes. Dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_M \models \varphi(a) &\Rightarrow t_1(a)^{\mathcal{M}_M} = t_2(a)^{\mathcal{M}_M}) \in R^{\mathcal{M}} \\ &\Rightarrow t_1^{\mathcal{M}}(a) = t_2^{\mathcal{M}}(a)) \in R^{\mathcal{M}} \text{ (exercice 2.10)} \\ &\Rightarrow t_1^{\mathcal{N}}(h(a)) = t_2^{\mathcal{N}}(h(a)) \text{ (exercice 2.4).} \\ &\Rightarrow t_1(a)^{\mathcal{N}_N} = t_2(a)^{\mathcal{N}_N} \in R^{\mathcal{N}} \text{ (exercice 2.10)} \\ &\Rightarrow \mathcal{N}_N \models t_1(h(a)) = t_2(h(a)). \end{aligned}$$

Cela montre que h préserve des formules atomiques. Pour l'autre direction, soit $h : M \to N$ une application qui préserve les formules atomiques. Pour montrer la condition (M1) de la définition de morphisme (voir 1.4.2), soit $R \in \mathcal{L}^{\mathfrak{r}}$ d'arité n et $a \in M^n$. Alors pour la formule atomique $Rx_1 \cdots x_n$ on a

$$\begin{aligned} a \in R^{\mathcal{M}} &\Rightarrow \mathcal{M}_M \models Ra \\ &\Rightarrow \mathcal{N}_N \models Rh(a) \\ &\Rightarrow h(a) \in R^{\mathcal{N}} \end{aligned}$$

Pour la condition (M2) soit $f \in \mathcal{L}^{\mathfrak{r}}$ d'arité n, $a \in M^n$ et $b = f^{\mathcal{M}}(a)$. Pour la formule atomique $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ on a que

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{M}}(a) = b &\Rightarrow \mathcal{M}_M \models f(a) = b \\ &\Rightarrow \mathcal{N}_N \models f(h(a)) = h(b) \\ &\Rightarrow f^{\mathcal{N}}(h(a)) = h(b) = h(f^{\mathcal{M}}(a)). \end{aligned}$$

Cela montre que h est un morphisme. Pour la partie (2), supposons d'abord que h préserve des formules sans quantificateurs. En particulier h préserves des formules atomiques, donc par la première partie h est un morphisme. Il nous reste à montrer que h est injective et la condition $(M1')$ donnée dans la Section 1.4.2. L'injectivité suit de préserver la formule $x \neq y$. La condition $(M1')$ suit de préserver $Rx_1 \cdots x_n$ et sa négation $\neg Rx_1 \cdots x_n$. On laisse au lecteur faire la preuve de la direction manquante. □

Dans le cas particulier des sous-structures on a :

Corollaire 3.4. *On suppose que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Alors*

(1) si φ est sans quantificateurs alors $\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi$;

(2) si φ est une formule existentielle, alors $\mathcal{M} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi$;

(3) si φ est une formule universelle, alors $\mathcal{N} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi$.

Démonstration. La partie (1) suit du Lemme 3.3 en sachant que l'inclusion est un plongement. Soit $\varphi(x)$ une formule sans quantificateurs telle que $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x)$. Soit $a \in A$ telle que $\mathcal{M} \models \varphi(a)$. Par la partie (1), $\mathcal{N} \models \varphi(a)$, ce qui implique $\mathcal{N} \models \exists x \varphi(x)$. La partie (3) se démontre de façon similaire. □

Corollaire 3.5. . *On suppose que $\mathcal{L}$ contient au moins un symbole de constante. Alors*

(1) h s'étend à un morphisme $h : \langle A \rangle_{\mathcal{M}} \to N$ si et seulement si h préserve des formules atomiques ;

(2) h s'étend à un plongement $h : \langle A \rangle_{\mathcal{M}} \to N$ si et seulement si h préserve des formules sans quantificateurs.

Démonstration. L'hypothèse garantie que la structure engendrée $\langle A \rangle_{\mathcal{M}}$ soit bien définie. La résultat suit du Lemme 3.4, son Corollaire 3.4 et le Lemme 2.5. □

⚠ Maintenant qu'on est "à l'aise" avec le passage de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{M}_M$, on se permettra l'abus de notation $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ pour dire $\mathcal{M} \models \varphi(a)$. Cela nous évitera les indices qui commencent à être un peu encombrants.

On dit que $h : A \to N$ est une *application élémentaire* si elle préserve toute formule, c'est-à-dire, pour toute formule $\varphi(x)$ et $a \in A^{|x|}$,

$$\mathcal{M} \models \varphi(a) \Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi(h(a)).$$

En particulier, par le Lemme 3.3, toute application élémentaire $M \to N$ est un plongement $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$, donc en particulier elle est injective. De plus, comme elle préserve la négation des formules on a que

$$\mathcal{M} \models \varphi(a) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(h(a)).$$

Chaque isomorphisme entre $\mathcal{L}$-structures est une application élémentaire. L'observation suivante sera souvent utilisée :

Observation 3.6. Soit $X \subseteq M^n$ un ensemble A-définissable. Alors tout automorphisme qui fixe A ponctuellement, fixe X globalement. En effet, soit $\varphi(x, y)$ une $\mathcal{L}$-formule et $a \in A^{|y|}$ tel que $X = \varphi(M, a)$, c'est-à-dire, X est définit par la $\mathcal{L}(A)$-formule $\varphi(x, a)$. Pour $\sigma \in \mathrm{Aut}(M/A)$ on a que

$$\begin{aligned} b \in X &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(b, a) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(\sigma(b), \sigma(a)) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(\sigma(b), a) \\ &\Leftrightarrow \sigma(b) \in X, \end{aligned}$$

donc $X = \sigma(X)$.

Cette observation nous donne directement un corollaire très utile :

Corollaire 3.7. *Soit $b \in M$ et soit $W := \{\sigma(b) : \sigma \in Aut_{\mathcal{L}}(M/A)\}$ l'orbite de b par $Aut_{\mathcal{L}}(M/A)$. Alors*

(1) $b \in dcl(A) \Rightarrow W = \{b\}$;

(2) $b \in acl(A) \Rightarrow W$ est fini.

Les implications inverses sont fausses. On peut remarquer cela dans l'exemple suivant :

Exemple 3.8. Soit $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, \mathcal{L}_{AO})$, les réels avec la structure d'anneau ordonné. Pour $A \subseteq \mathbb{R}$ on note que $\mathrm{dcl}(A) = \mathrm{acl}(A)$. En effet, si $b \in \mathrm{acl}(A)$, soit $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini A-définissable tel que $b \in X$ et défini par la formule $\varphi(x)$. Comme $\mathbb{R}$ est totalement ordonné, on peut supposer que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. On définit par récurrence pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ les formules
- $\psi_1(x) :=$ '$\varphi(x) \wedge \forall y(\varphi(y) \rightarrow x \leq y)$',
- $\psi_{i+1}(x) :=$ '$\varphi(x) \wedge \forall y((\varphi(y) \wedge \neg\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_i) \rightarrow x \leq y)$'.

On remarque que $\psi(\mathbb{R}) = a_i$, donc chaque $a_i \in \mathrm{dcl}(A)$. Notons que $|\mathcal{L}_{AO}| = \aleph_0$, ce qui entraîne que $|\mathrm{dcl}(\emptyset)| = \aleph_0$. Comme $\mathbb{R}$ est de cardinalité $2^{\aleph}_0$, il existe $a \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{dcl}(\emptyset)$. Or, le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_{A0}}(\mathbb{R})$ est trivial, donc a est fixé par tout automorphisme de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_{A0}}(\mathbb{R})$ mais n'appartiens par ni à la clôture définissable ni à la clôture algébrique du vide.

Dans le chapitre 5 on caractérisera les clôtures définissable et algébrique en utilisant le groupe d'automorphisme d'une extension de $\mathcal{M}$. L'Observation 3.6 nous donne aussi un premier outil pour montrer qu'un ensemble n'est pas définissable. Voyons des exemples :

Exemples 3.9.

(1) Considérons encore un ensemble infini dans le langage vide, par exemple, $\mathbb{R}$. Dans l'exemple 2.1 on a montré que les singletons ne sont pas 0-définissables dans cette structure. Pour montrer cela, on a dû décrire d'abord tous les ensembles définissables. Ici un donne une autre preuve. Le groupe d'automorphismes de cette structure correspond tout simplement au groupe de permutations. Mais pour chaque $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, il existe une permutation h telle que $h(r_1) = r_2$; donc $\{r_1\}$ n'est pas 0-définissable.

(2) La relation d'ordre n'est pas définissable dans la $\mathcal{L}_{GA}$-structure $(\mathbb{R}, 0, -, +)$. En effet pour tout $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ il existent un automorphisme σ de cette structure tel que $\sigma(r_i) = r_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $r \in \mathbb{R}$ tel que $\sigma(r) < 0 < r$ (cela utilise l'axiome du choix).

3.3. **Équivalence élémentaire.** Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures. On dit que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalentes (notation : $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$) si elles satisfont les mêmes $\mathcal{L}$-énoncés. En particulier, par le Lemme 3.3 on a

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}.$$

On montrera qu'il existent des structures non-isomorphes qui sont élémentairement équivalentes. C'est le cas par exemple des ordres linéaires $(\mathbb{Q}, \leq)$ et $(\mathbb{R}, \leq)$, dans lequel leurs cardinalités nous imposent déjà qu'elles ne peuvent pas être isomorphes. Pour montrer qu'elle sont élémentairement équivalentes on utilise une méthode appelé le 'vas-et-viens" qu'on introduit maintenant.

Définition 3.10. Un isomorphisme partiel de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}$ est une bijection $\gamma : A \to B$ avec $A \subseteq M$ et $B \subseteq N$, telle que

(1) pour chaque $R \in L^{\mathfrak{r}}$ d'arité m et $a \in A^m$,

$$a \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \gamma(a) \in R^{\mathcal{N}};$$

(2) pour chaque $f \in L^{\mathfrak{f}}$ d'arité n et $a \in A^n, b \in A$,

$$f^{\mathcal{M}}(a) = b \Leftrightarrow f^{\mathcal{N}}(\gamma(a)) = \gamma(b)$$

Notons que dans cette définition on ne suppose pas que A et B soient des sous-structures de $\mathcal{M}$ et de $\mathcal{N}$, respectivement. Dans le cas où ils le sont, alors un isomorphisme partiel $A \to B$ est aussi un isomorphisme entre les structures A et B. Étand donné $\gamma : A \to B$ un isomorphisme partiel de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}$, on écrit $\mathrm{dom}(\gamma) := A$ pour le domaine de l'application γ, et $\mathrm{cod}(\gamma) := B$ son codomaine. Soit $(\gamma_i)_{i \in I}$ une famille d'isomorphismes partiels indexée par en ensemble dirigé $(I, \leq)$ telle que si $i \leq j$ alors γ_j étend γ_i. Alors il existe un unique isomorphisme partiel $\gamma := \bigcup_{i \in I} \gamma_i$ tel que $\mathrm{dom}(\gamma) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{dom}(\gamma_i)$.

Exemple 3.11. Soient $\mathcal{M} = (M, \leq)$ et $\mathcal{N} = (N, \leq)$ des ensembles ordonnés, et $a_1, \ldots, a_n \in M$ et and $b_1, \ldots, b_n \in N$ avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$. Alors l'application $\gamma : \{a_1, \ldots, a_n\} \to \{b_1, \ldots, b_n\}$ qui envoie $a_i \mapsto b_i$ est un isomorphisme partiel de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}$.

Une démonstration de routine montre le Lemme suivant

Lemme 3.12. *Soit $\gamma : A \to B$ un isomorphisme partiel de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ et $t(x)$ un $\mathcal{L}$-terme. Alors pour chaque $a \in A^x$ et $b \in A$,*

$$t^{\mathcal{M}}(a) = b \Leftrightarrow t^{\mathcal{N}}(\gamma(a)) = \gamma(b).$$

Définition 3.13. Un système de vas-et-viens de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ est une collection non-vide Γ d'isomorphismes partiels de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}$ telle que :

(1) ("vas") pour chaque $\gamma \in \Gamma$ et chaque $a \in M$, il existe $\gamma' \in \Gamma$ qui étend γ et $a \in \mathrm{dom}(\gamma')$.

(2) ("viens") pour chaque $\gamma \in \Gamma$ et chaque $b \in N$, il existe $\gamma' \in \Gamma$ qui étend γ et $b \in \mathrm{cod}(\gamma')$.

On dit que $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ sont vas-et-viens équivalentes (notation : $M \equiv_{vv} \mathcal{N}$) s'il existe un système de vas-et-viens de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$.

Proposition 3.14. *Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont dénombrables et $M \equiv_{vv} \mathcal{N}$, alors $M \cong \mathcal{N}$.*

Démonstration. Soit Γ un système de vas-et-viens de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$. Soient $(a_i)_{i\leq\omega}$ et $(b_i)_{i\leq\omega}$ des énumérations de M et N respectivement. Ce système nous permet de définir par récurrence une famille $(\gamma_i)_{i\leq\omega}$ d'isomorphismes partiels dans Γ telle que

(1) $a_i \in \mathrm{dom}(\gamma_{2i})$ (vas) ;

(2) $b_i \in \mathrm{cod}(\gamma_{2i+1})$ (viens).

Donc $\gamma = \bigcup_{i\leq\omega}$ est un isomorphisme $\gamma : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. □

Pour utiliser la proposition précédente et aussi la proposition suivante, la clé reste trouver un système de vas-et-viens entre les structures. C'est là où l'expérience et l'imagination jouent un rôle important. Dans la proposition suivante il n'y a pas d'hypothèse sur la cardinalité des ensembles.

Proposition 3.15. *Si $M \equiv_{vv} \mathcal{N}$ alors $M \equiv \mathcal{N}$.*

Proof of Proposition 3.15 : Soit Γ un système de vas-et-viens de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$. Soit $\varphi(x)$ une $\mathcal{L}$-formule. On montre que pour tout $a \in M^x$ et tout $\gamma \in \Gamma$

$$\mathcal{M} \models \varphi(a) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\gamma(a)).$$

Cela implique, par le Lemme 3.3 pour les énoncés, que $M \equiv \mathcal{N}$. On démontre le résultat par récurrence sur la complexité de φ. Pour cela on a besoin d'abord de l'affirmation suivante :

Affirmation 3.16. *pour tout $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x)$ de la forme $t_1(x) = t_2(x)$ avec t_1, t_2 des termes, pour tout $a \in M^x$ et $\gamma \in \Gamma$*

$$t_1^{\mathcal{M}}(a) = t_2^{\mathcal{M}}(a) \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{N}}(\gamma(a)) = t_2^{\mathcal{N}}(\gamma(a)).$$

Soit $b = t_2^{\mathcal{M}}(a)$ et $\gamma' \in \Gamma$ telle que elle étend γ et $b \in \mathrm{dom}(\gamma')$. Par le Lemme 3.12, on a que

$$t_1^{\mathcal{M}}(a) = b = t_2^{\mathcal{M}}(a) \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{N}}(\gamma'(a)) = \gamma'(b) = \gamma'(t_2^{\mathcal{M}}(\gamma(a))).$$

Comme $\gamma'(t_2^{\mathcal{M}}(\gamma(a))) = t_2^{\mathcal{N}}(\gamma(a)))$, ceci montre l'affirmation.

Par l'affirmation, la Proposition est vrai si $\varphi(x)$ est une formule atomique de la forme $t_1(x) = t_2(x)$ avec t_1, t_2 des termes. Supposons que $\varphi(x)$ soit de la forme $Rt_1(x) \cdots t_n(x)$ pour $t_1(x), \ldots, t_n(x)$ des termes. Soient $b_i = t_i^{\mathcal{M}}(a)$ et $\gamma' \in \Gamma$ telle que elle étend γ et chaque $b_i \in \mathrm{dom}(\gamma')$. Alors par le Lemme 3.12, pour $b = (b_1, \ldots, b_n)$

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models Rt_1(a) \cdots t_n(a) &\Leftrightarrow b \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \gamma(b) \in R^{\mathcal{N}} \\ &\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}(\gamma(a)), \ldots, t_n^{\mathcal{M}}(\gamma(a))) \in R^{\mathcal{N}} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \models Rt_1(\gamma(a)) \cdots t_n(\gamma(a)).\end{aligned}$$

Si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des formules pour lesquelles la proposition soit vrai, alors il est facile à voir que la proposition reste vrai pour $\neg\varphi$, $\varphi(x) \wedge \psi(x)$ et $\varphi(x) \vee \psi(x)$. Il nous reste les cas des quantificateurs. On fait le cas de $\exists$ (l'autre cas peut se déduire avec avec la négation). Donc supposons que $\varphi(x)$ est de la forme $\exists y \psi(x, y)$. On peut supposer que la variable y est disjointe de la multivariable x. Supposons $\mathcal{M} \models \exists y \varphi(y, a)$. Soit $b \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \varphi(b, a)$ et $\gamma' \in \Gamma$ telle que elle étend γ et $b \in \mathrm{dom}(\gamma')$. Alors, par l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{N} \models \varphi(\gamma'(b), \gamma'(a))$. Donc, $\mathcal{N} \models \exists \varphi(y, \gamma(a))$. □

Exercice 3.17. Soient $\mathcal{M} = (M, \leq)$ et $\mathcal{N} = (N, \leq)$ des ordres linéaires denses sans extrémités. Montrer que la collection des isomorphismes partiels finis, c'est-à-dire, ayant un domaine fini, est un système de vas-et-viens.

Eu utilisant l'exercice précédent et les Propositions 3.14 on peut déduire un résultat classique de Cantor : tous les ordres denses sans extrémités dénombrables sont isomorphes. De plus, par la Proposition 3.15 on a que $(\mathbb{Q}, \leq) \cong (\mathbb{R}, \leq)$, or ils ne sont pas isomorphes. On peut lire ce résultat comme : les $\mathcal{L}_O$-énoncés ne peuvent pas distinguer $(\mathbb{Q}, \leq)$ de $(\mathbb{R}, \leq)$.

3.4. **Sous-structures élémentaires.** Soient $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. On dit que $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$ (et que l'extension $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ est élémentaire) si l'inclusion est une application élémentaire (notation : $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$). Autrement dit, $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ si et seulement si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ et pour tout formule $\varphi(x)$ et $a \in M^x$

$$\mathcal{M} \models \varphi(a) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(a).$$

Être une extension élémentaire est d'habitude plus fort qu'être seulement une sous-structure comme le montre l'exemple suivant sur les groupes.

Exemple 3.18. Soient G et H deux groupes vus comme des $\mathcal{L}_G$-structures. Supposons que $G \prec H$ et que H est simple. On montre que G est aussi simple. Il suffit de montrer que pour $g; g' \in G$ avec $g \neq 1$, g' appartiens au sous-groupe distingué de G engendré par g. Comme H est simple, cela est vrai dans H, c'est-à-dire, $g' = h_1 g^{k_1} h_1{-}1 \cdots h_n g^{k_n} h_n{-}1$ pour un entier $n > 1$, $h_1, \ldots, h_n \in H$, et $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$. Alors on a que H satisfait

$$H \models \exists x_1 \cdots \exists x_n (g' = x_1 g^{k_1} x_1{-}1 \cdots x_n g^{k_n} x_n{-}1),$$

and since $G \prec H$, on a aussi que

$$G \models \exists x_1 \cdots \exists x_n (g' = x_1 g^{k_1} x_1{-}1 \cdots x_n g^{k_n} x_n{-}1),$$

donc g' appartiens au sous-groupe distingué engendré par g. Comme g, g' était quelconques, cela montre que G est simple.

La proposition suivantes nous donne un critère très utilise pour montrer qu'une extension est élémentaire. En fait, il montre un tout petit peut plus.

Proposition 3.19. *(Tarski-Vaught Test). Soit $A \subseteq \mathcal{N}$ et supposons que pour toute $\mathcal{L}(A)$-formule $\varphi(x)$ avec $|x| = 1$,*

$$\mathcal{N} \models \exists x \varphi(x) \Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi(a) \text{ for some } a \in A.$$

Alors A est l'ensemble de base d'une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$.

Démonstration. Notons d'abord que comme $N \neq \emptyset$, A n'est pas vide (même si $\mathcal{L}$ est le langage vide, on a que $\mathcal{N} \models \exists x(x = x)$). Montrons d'abord que A est l'ensemble de base s'une sous-structure de $\mathcal{N}$. Il suffit de montrer que A est clos par les fonctions primitives. Soit f un symbol de fonction de $\mathcal{L}$ d'arité n et $a \in A^n$. Considérant la formule $\varphi(x) := f(a) = x$, on a trivialement que $N \models \exists x \varphi(x)$ donc $f^{\mathcal{N}}(a) \in A$. On montre maintenant que la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$ ayant A comme ensemble de base est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$. On montre cela par récurrence sur les $\mathcal{L}(A)$-énoncés φ. Si φ est atomique, alors le résultat suit du Corollaire 3.4. Il reste facile à démontrer sous l'hypothèse de récurrence que le résultat est reste vrai lorsqu'on fait des négations, des conjonctions et des disjonctions. Finalement, on suppose que $\varphi = \exists y \psi(y)$ pour $\psi(y)$ une $\mathcal{L}(A)$-formule. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models \exists y \psi(y) &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a) \text{ for some } a \in A\\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \models \psi(a) \text{ for some } a \in A\\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \models \exists y \psi(y),\end{aligned}$$

où la dernière ligne est justifié par l'hypothèse et l'avant dernière par l'hypothèse de récurrence. □

Corollaire 3.20. *Si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ et pour chaque sous-ensemble fini $A \subseteq M$ et tout $b \in N$ il existe un automorphisme $\sigma \in Aut(N/A)$ tel que $h(b) \in M$, alors $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$.*

Démonstration. On utilise le test de Tarski-Vaught, donc on suppose que $\mathcal{N} \models \exists x \varphi(x)$ pour une $\mathcal{L}(M)$ formule. Comme toute formule est finie, soient $A \subseteq M$ l'ensemble fini des interprétations des symboles de constante qui apparaissent dans φ. Donc $\varphi(x)$ est une $\mathcal{L}(A)$ formule. Dans ce cas, soit $b \in N$ tel que $\mathcal{N} \models \varphi(b)$. Par hypothèse, soit $\sigma \in Aut(N/A)$ tel que $h(b) \in M$. On a bien donc que $\mathcal{N} \models \varphi(\sigma(b))$. Par le test de Tarski-Vaught, on a que $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$. □

Exemple 3.21. Avec le corollaire précédent et un peu de travail on peut montrer que

$$(\mathbb{Q}, \leq) \preceq (\mathbb{R}, \leq).$$

Cela montre en particulier que ces deux structures sont élémentairement équivalentes.

On utilise le test de Tarski-Vaught pour construire des sous-structures élémentaires "petites", on aura besoin ici de la notion de "cardinalité de $\mathcal{L}$" définit dans la section XX :

Proposition 3.22. *(Löwenheim-Skolem "descendant"). Soit $A \subseteq N$ et κ un cardinal tel que $\max\{|A|, |\mathcal{L}|\} \leq \kappa \leq |N|$. Alors, $\mathcal{N}$ a une sous-structure élémentaire $\mathcal{M}$ telle que $A \subseteq M$ et $|M| = \kappa$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $|A| = \kappa$ (sinon, on rajoute des paramètres). On utilisera la construction suivante. Pour $B \subseteq N$, on définit l'ensemble Φ_B comme l'ensemble de toutes les $\mathcal{L}(B)$-formules $\varphi(x)$ telles que $\mathcal{N} \models \exists x \varphi(x)$ (ici $|x| = 1$). Pour chaque $\varphi \in \Phi_B$, soit $b_\varphi \in N$ tel que $\mathcal{N} \models \varphi(b_\varphi)$. Soit finalement $B' := \{b_\varphi : \varphi \in \Phi_B\}$. Notons ici que $B \subseteq B'$. En effet pour chaque $b \in B$, la formule $\varphi :=$ "$x = b''$ est une formule de Φ_B, donc $b \in B'$. De plus, $|B'| = \max\{|B|, |\mathcal{L}|\} = |\mathcal{L}(B)|$. On définit maintenant une suite $(A_i)_{i \leq \omega}$ de sous-ensembles de N de la façon suivante :

(1) $A_0 := A$;
(2) $A_{i+1} := A'_i$.

Pour $M := \bigcup_{i \leq \omega} A_i$, on a bien que $|M| = \kappa$. De plus, par construction, le test de Tarski-Vaught montre que M est l'ensemble de base d'une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$. □

Exemple 3.23. On en déduit du théorème de Löwenheim-Skolem descendant et l'exemple 3.18 que tout groupe infini H contient un sous-groupe simple de cardinalité κ pour chaque cardinal $\kappa \leq |H|$. En particulier, il contient un sous-groupe simple dénombrable.

4. Théories, modèles et compacité

Dans ce qui suit, sauf mention du contraire, t sera un $\mathcal{L}$-terme, φ, ψ et θ des $\mathcal{L}$-formules, et Σ un ensemble de $\mathcal{L}$-énoncés. On omet le préfixe $\mathcal{L}$ pour $\mathcal{L}$-terme, $\mathcal{L}$-formule, etc., sauf si cela peut mener à confusion.

4.1. **Théories et modèles.**

Définition 4.1.
- $\mathcal{M}$ *est un modèle de* Σ, noté $\mathcal{M} \models \Sigma$, si $M \models \varphi$ pour tout énoncé $\varphi \in \Sigma$.
- φ est une *conséquence logique* de Σ, noté $\Sigma \models \varphi$, si $\mathcal{M} \models \varphi$ pour tout modèle $\mathcal{M}$ de Σ. On écrira aussi $\psi \models \varphi$ au lieu de $\{\psi\} \models \varphi$.
- La classe $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ correspond à la classe de tous le modèles de Σ.
- Une sous-partie $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ est une *axiomatisation* de Σ si $\mathrm{Mod}(\Sigma_0) = \mathrm{Mod}(\Sigma)$.
- Un ensemble d'énoncés T est une *théorie* s'il est clos par conséquence logique, c'est-à-dire, si pour tout $\mathcal{L}$-énoncé φ tel que $T \models \varphi$, alors $\varphi \in T$. On utilise la lettre T pour les théories et Σ pour les ensembles d'énoncés qui ne sont pas nécessairement clos par conséquence logique.
- *La théorie engendrée par* Σ, noté $Th(\Sigma)$, c'est la plus petite théorie qui contient Σ. Autrement dit c'est l'intersection de toutes les théories contenant Σ.
- *La théorie de* $\mathcal{M}$ c'est l'ensemble de $\mathcal{L}$-énoncés
$$Th(\mathcal{M}) := \{\varphi : \mathcal{M} \models \varphi, \varphi \text{ un } \mathcal{L}\text{-énoncé}\}.$$
- Une théorie T est *complète* si elle a un modèle et pour tout énoncé φ ou bien $T \models \varphi$ ou bien $T \models \neg\varphi$. Une théorie complète qui contient un ensemble d'énoncés Σ est dit *une complétion de* Σ.

Le lecteur peut se convaincre sans difficulté que les ensembles $Th(\Sigma)$ et $Th(\mathcal{M})$ sont des théories. Pour le deuxième cas, supposons que $Th(\mathcal{M}) \models \varphi$. Comme $\mathcal{M} \models Th(\mathcal{M})$, on a aussi que $\mathcal{M} \models \varphi$, d'où $\varphi \in Th(\mathcal{M})$. Il n'est pas difficile non-plus de voir que
$$\Sigma \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models \varphi \Leftrightarrow \Sigma \models (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi.$$
De plus, les modèles d'un ensemble Σ et ceux de sa théorie engendrée $Th(\Sigma)$ sont les mêmes, c'est à dire, les classes $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ et $\mathrm{Mod}(Th(\Sigma))$ sont la même. Avant de donner des exemples ont introduit une notation classique pour les termes. Supposons que $\mathcal{L}$ contient au moins un symbole de constante 0 et un symbole de function '+' d'arité 2. Étant donné des termes $t_1, \ldots, t_n$ on définit le terme $t_1 + \cdots + t_n$ par récurrence comme :

(1) pour $n = 0$, il correspond à la constante 0 ;
(2) pour $n = 1$, il correspond au terme t_1 ;
(3) pour $n > 1$, il correspond au terme $(t_1 + \cdots + t_{n-1}) + t_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on écrit nt pour $t_1 + \cdots + t_n$ avec $t_i = t$ pour tout $1 \leq i \leq n$. En particulier $0t = c$ et $1t = t$ (en sachant que les deux occurrences de 0 dans "$0t = 0$" dénotent des objets différents, à savoir, le premier correspond au nombre entier et le deuxième correspond au symbole de constante de $\mathcal{L}$). De même, pour un langage qui contient un symbole de constante 1 et un symbole de fonction '$\cdot$' d'arité 2, on définit de façon analogue $t_1 \cdot \cdots \cdot t_n$ et t^n. Dans ce cas $t^0 = 1$ and $t^1 = t$ comme d'habitude. Voyons maintenant des exemples.

Exemples 4.2. Soient x, y et z trois variables de $\mathcal{L}$.

(1) Les groupes sont les $\mathcal{L}_G$-structures qui sont modèles de

$$\mathrm{Gr} := \begin{cases} \forall x(x \cdot 1 = x) \\ \forall x(x \cdot x^{-1} = 1) \\ \forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)) \end{cases}$$

La théorie $Th(\mathrm{Gr})$ c'est *la théorie des groupes* ! Parfois on l'appelé aussi la *théorie de premier ordre des groupes* car on utilise le nom "théorie des groupes" comme un nom informel et générique pour parler de l'étude des groupes. Ici $Th(\mathrm{Gr})$ est l'ensemble des $\mathcal{L}_G$-énoncés qui est satisfait par tous les groupes, voire, une petite partie de ce qu'on appelle informellement la théorie de groupes.

(2) Les groupes abéliens sont les $\mathcal{L}_{GA}$-structures qui sont modèles de

$$\mathrm{Ab} := \begin{cases} \forall x \forall y \forall z((x + y) + z = x + (y + z)) \\ \forall x(x + 0 = x) \\ \forall x(x + (-x) = 0) \\ \forall x \forall y(x + y = y + x) \end{cases}$$

(3) Les groupes abéliens libres sans torsion sont les $\mathcal{L}_A$-structures qui sont modèles de

$$\mathrm{AbSt} := \mathrm{Ab} \cup \{\forall x(nx = 0 \to x = 0) : n > 0\}.$$

(4) Les groupes abéliens divisibles sont les $\mathcal{L}_A$-structures qui sont modèles de

$$\mathrm{Gad} := \mathrm{Ab} \cup \{\forall x \exists y(nx = y) : n > 0\}.$$

(5) Les ensembles ordonnés sont les $\mathcal{L}_O$-structures qui satisfont

$$\mathrm{Or} := \begin{cases} \forall x(x \leq x) \\ \forall x \forall y \forall z((x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z) \\ \forall x \forall y((x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y) \end{cases}$$

(6) Si l'on abrège $x \leq y \wedge x \neq y$ par $x < y$, les ordres denses sans extrémités sont les $\mathcal{L}_O$-structures qui satisfont (par son nom en anglais)

$$\mathrm{DLO} := \mathrm{Or} \cup \{\forall x \forall y \exists z(x < y \to (x < z \wedge z < y), \forall x \exists y \exists z(y < x \wedge x < z)\}.$$

(7) Les groupes abéliens ordonnés sont les $\mathcal{L}_{GAO}$-structures qui sont modèles de

$$\mathrm{GAO} := \mathrm{Or} \cup \mathrm{Ab} \cup \{\forall x \forall y \forall z(x \leq y \to x + z \leq y + z)\}.$$

(8) Les anneaux sont les $\mathcal{L}_A$-structures qui satisfont

$$\mathrm{An} := \mathrm{Ab} \cup \begin{cases} \forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)) \\ \forall x(x \cdot 1 = x) \\ \forall x(1 \cdot x = x) \\ \forall x \forall y \forall z(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)) \\ \forall x \forall y \forall z((x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)) \end{cases}$$

(9) Les corps seront traités comme des $\mathcal{L}_A$-structures qui satisfont

$$\mathrm{Fl} := \mathrm{An} \cup \{\forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x), 1 \neq 0, \forall x(x \neq 0 \to \exists y(x \cdot y = 1))\}.$$

(10) Les anneaux ordonnés sont les $\mathcal{L}_{AO}$-structures qui satisfont

$$\mathrm{Ao} := \mathrm{GAO} \cup \mathrm{An} \cup \{\forall x \forall y (0 \leq x \wedge 0 \leq y \to 0 \leq x \cdot y)\},$$

(11) Les corps ordonnés sont les $\mathcal{L}_{AO}$-structures qui sont modèles des $OF := Ao \cup Fl$.

(12) Soit p un entier premier. Les corps de caractéristique p sont $\mathcal{L}_A$-structures qui satisfont

$$\mathrm{Fl}_p := \mathrm{Fl} \cup \{p1 = 0\},$$

et les corps de caractéristique 0 celles qui satisfont

$$\mathrm{Fl}_0 := \mathrm{Fl} \cup \{n1 \neq 0 : n > 1\}.$$

(13) Les corps algébriquement clos sont les $\mathcal{L}_A$-structures qui satisfont (pour son nom en anglais)

$$\mathrm{ACF} := \mathrm{Fl} \cup \{\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \exists y (y^n + x_{n-1} y^{n-1} + \cdots + x_0 = 0) : n > 1\}.$$

pour x_i des variables distinctes de $\mathcal{L}$ pour tout $i \geq 1$ et avec l'abréviation $x_i y^{n-i}$ $x_i \cdot y^{n-i}$, pour $i = 1, \ldots, n$.

(14) Pour p en nombre premier ou $p = 0$, les corps algébriquements clos de caractéristique p sont les $\mathcal{L}_A$-structures qui sont modèles de

$$\mathrm{ACF}_p := \mathrm{Fl}_p \cup \mathrm{ACF}.$$

Par définition, Mod(Gr) est égale à Mod(Th(Gr)) et correspond à la classe de tous les groupes. De même, mod $(Fl) =$ mod $(Th(Fl))$ correspond à la classe de tous les corps, etc. On sait par exemple que le $\mathcal{L}_G$-énonce

$$\varphi = \forall x ((\forall y xy = y) \to x = 1),$$

est une conséquence logique de Gr, car dans tout groupe l'identité est unique. On a donc que $\varphi \in Th(\mathrm{Gr})$. Notons que la théorie $Th(\mathrm{Gr})$ est loin d'être complète. En effet soient G un groupe abélien et H un groupe non-abélien. Bien évidement G et H sont modèles de $Th(\mathrm{Gr})$, or pour l'énoncé $\varphi = \forall x \forall (x + y = y + x))$

$$G \models \varphi \qquad\qquad H \not\models \varphi,$$

ce qui montre que $Th(\mathrm{Gr}) \not\models \varphi$ et $Th(\mathrm{Gr}) \not\models \neg\varphi$. On peut se demander si l'une des deux théories

$$Th(\mathrm{Gr} \cup \{\varphi\}) \qquad\qquad Th(\mathrm{Gr} \cup \{\neg\varphi\}),$$

est complète. Notons que $Th(\mathrm{Gr} \cup \varphi)$ n'est rien d'autre que $Th(\mathrm{Ab})$ la théorie des groupes abéliens, et $Th(\mathrm{Gr} \cup \neg\varphi)$ correspond à la théorie de groupes non-abéliens. Aucune des deux théories est complète car, par exemple, il y a des groupes abéliens (resp. non-abéiens) avec et sans torsion. On laisse le lecteur s'amuser pour savoir si rajouter des axiomes pour la torsion (ou l'absence de torsion) mène à des théories complètes. Notons plutôt le fait suivant qu'on vient d'utiliser tacitement :

Observation 4.3. Une théorie T est complète si et seulement si tous ses modèles sont élémentairement équivalents. En effet, supposons que T soit complète et soient $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ des modèles de T. Pour φ supposons que $\mathcal{M} \models \varphi$. Cela contredit que $T \models \neg\varphi$, et comme T est complète on a donc $T \models \varphi$, ce qui implique que $\mathcal{N} \models \varphi$ et en prenant des négations que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Réciproquement, soient $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ et φ un énoncé etl que $\mathcal{M} \models \varphi$ et $\mathcal{N} \models \neg\varphi$. Il est claire dans ce cas que $T \not\models \varphi$ et $T \not\models \neg\varphi$, donc T n'est pas complète.

Il est souvent plus difficile de montrer qu'une théorie est complète. Parmi les exemples donnés dans 4.2 la théorie des ordres denses sans extrémités est complète ainsi que la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p pour p en nombre premier ou $p = 0$. Le résultat suivant, un théorème classique de Cantor, nous fourni d'une preuve pour montrer que la théorie des ordres denses sans extrémités est complète :

Théorème 4.4 (Cantor). *Deux ordres linéaires denses sans extrémités dénombrables sont isomorphes.*

Proposition 4.5. *La théorie $Th(DLO)$ est complète.*

Démonstration. Soient $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ deux modèles de $Th(DLO)$. Par le théorème de Löwenheim-Skolem descendant, pour $i = 1, 2$ il existe $\mathcal{M}_i$ tel que $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{N}_i$ et $|M_i| = \aleph_0$. Par le théorème de Cantor

$$\mathcal{N}_1 \equiv \mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2 \equiv \mathcal{N}_2,$$

d'où $\mathcal{N}_1 \equiv \mathcal{N}_2$. Par l'Observation 4.3, $Th(DLO)$ est complète. □

On montrera le résultat analogue pour les corps algébriquement clos à la fin de cette section.

4.2. **Compacité.** Cette section contient l'un des théorèmes fondamentaux de la théorie des modèles, le *théorème de compacité* :

Théorème 4.6 (Compacité). *Soit Σ un ensemble d'énoncés. Si tous sous-partie finie de Σ a un modèle alors Σ a un modèle.*

On démontrera ce théorème avec l'aide des ultraproduits dans les Section 5. Dans le reste de cette section on verra quelques applications de la compacité. Tout d'abord, voyons une réformulation utile en termes de conséquence logique (qu'on appellera aussi "compacité") :

Théorème 4.7 (Compacité). *Si $\Sigma \models \varphi$ alors il existe un sous-ensemble fini $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tel que $\Sigma_0 \models \varphi$.*

Démonstration. On montre la contraposée. Supposons que $\Sigma_0 \not\models \varphi$ pour tous les sous-parties finies $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$. Alors tout sous-partie finie $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ a un modèle. Par le Théorème de compacité 4.6, $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ a un modèle, d'où $\Sigma \not\models \varphi$. □

Voici une application bien connue :

Proposition 4.8. *Un $\mathcal{L}_A$-énoncé qui est vrai dans tous les corps de caractéristique 0 est vrai aussi dans tous les corps de caractéristique p pour p un nombre premier suffisamment grand.*

Démonstration. Soit φ un $\mathcal{L}_A$-énoncé qui est vrai dans tous les corps de caractéristique 0, c'est-à-dire,

$$\mathrm{Fl}_0 = \mathrm{Fl} \cup \{n1 \neq 0 : n > 1\} \models \varphi.$$

Par compacité (4.7), il existe une sous-partie finie Σ_0 de Fl_0 telle que $\Sigma_0 \models \varphi$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathrm{Fl} \cup \{n1 \neq 0 : n < N\} \models \varphi,$$

ce qui montre que $\mathrm{Fl}_p \models \varphi$ pour tout $p \geq N$, donc φ est vrai dans tout corps de caractéristique $p \geq N$ □

Cette proposition implique en particulier qu'il n'existe pas une axiomatisation finie de la théorie des corps de caractéristique 0 dans le langage $\mathcal{L}_A$. Voici une variante plus sophistiquée de la même idée :

Proposition 4.9. *(Noether-Ostrowski) Soit $T = (T_1, \ldots, T_n)$ et $P \in \mathbb{Z}[T]$ irréductible sur $\mathbb{C}$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout nombre premier $p > N$ et tout corps de F de caractéristique p, $P \pmod p$ est irréductible sur F.*

Pour démontrer cette proposition on utilisera le lemme suivant.

Lemme 4.10. *Soit φ un $\mathcal{L}_A$-énoncé universel tel que $\mathbb{C} \models \varphi$. Alors $F \models \varphi$ pour tout corps F de caractéristique 0.*

Démonstration. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ une multivariable, et $\psi(x)$ une formule atomique telle que $\varphi = \forall x \psi(x)$. Supposons qu'il existe un corps F de caractéristique 0 tel que $F \not\models \forall x \psi(x)$. Dans ce cas on a que $F \models \exists x \neg\psi(x)$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in F^n$ un uplet tel que $F \models \neg\psi(a)$. Or le corps $\mathbb{Q}(a)$ se plonge donc dans F et dans $\mathbb{C}$ et cela contredit le Lemme 3.3. En effet on d'une part que $\mathbb{Q}(a) \models \neg\psi(a)$, et d'une autre que $\mathbb{C} \models \neg\psi(ha)$ où $h : \mathbb{Q}(a) \to \mathbb{C}$ dénote un plongement. Or par hypothèse, $\mathbb{C} \models \forall x \psi(x)$. $\square$

Démonstration de la Proposition 4.9 : On montre d'abord qu'il existe un $\mathcal{L}_A$-énoncé universel φ tel que pour tout corps F de caractéristigue 0, P est irréductible sur F si et seulement si $F \models \varphi$. Soit m le degré de P et $J \subseteq \mathbb{N}^n$ l'ensemble de tous le uplets ayant une somme de leurs coordonnées plus petite ou égal à $m-1$. L'ensemble J est fini, disons $\{j_1, \ldots, j_k\}$ et on peut supposer sans perte de généralité que cette énumération respecte l'ordre lexicographique. En particulier $j_1 = (0, \ldots, 0)$. On pose donc pour $x = (x_1, \ldots, x_k)$ et $y = (y_1, \ldots, y_k)$

$$\varphi := \forall x \forall y \left(\left(\bigvee_{i=2}^{k} x_i \neq 0 \wedge \bigvee_{i=2}^{k} y_i \neq 0 \right) \to P \neq \left(\sum_{i=1}^{k} x_i T^{j_i} \right) \left(\sum_{j=1}^{k} y_{i_j} T^{i_j} \right) \right).$$

Par le Lemme 4.10 et notre hypothèse on déduit que P est irréductible sur F pour tout corps F de caractéristique 0. D'où

$$\mathrm{Fl}_0 \models \varphi.$$

Par compacité φ est une conséquence logique d'une sous-partie finie de Fl_0. Le résultat découle de la même façon que dans la Proposition 4.8. $\square$

La compacité nous permet de montrer la version ascendante du théorème de Löwenheim-Skolem.

Théorème 4.11 (Löwenheim-Skolem ascendant)**.** *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure infini et $\kappa \geq \max(|\mathcal{L}|, |M|)$ un cardinal. Il existe une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ de cardinalité κ.*

Démonstration. Soit C un ensemble de symboles de constante de cardinalité κ tel que $C \cap \mathcal{L}_M = \emptyset$. On considère l'ensemble de formules

$$\Sigma = Th(\mathcal{M}_M) \cup \{c \neq d : c, d \in C \text{ des symboles différents}\}.$$

Il suffit de montrer que Σ a un modèle. En effet si $\mathcal{N}$ est un modèle de Σ, l'inclusion est un plongement élémentaire de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ car $\mathcal{N} \models Th(\mathcal{M}_M)$. D'autre part, tout modèle de Σ doit avoir κ éléments distinctes qui interprètent les symboles de constante de C. Par compacité, il suffit donc de montrer que toute partie finie Σ_0 de Σ a un modèle. Mais une partie finie de Σ contient un nombre fini de symboles de constante de C. Donc comme M est infini, on peut toujours les interpréter dans $\mathcal{M}$. Dans ce cas, $\mathcal{M}$ est toujours un modèle de Σ_0 lorsqu'on interprète les constantes qui apparaissent dans Σ_0 par des éléments distinctes dans M. □

Avec l'aide du suivant théorème de Steinitz on verra comment les théorèmes de Löwenheim-Skolem nous donnent une preuve de la complétude de la théorie de corps algébriquement clos de caractéristique p pour p premier ou 0.

Théorème 4.12 (Steinitz)**.** *Tous les corps algébriquement clos de caractéristique p (p premier ou 0) de cardinalité $2^{\aleph_0}$ sont isomorphes.*

Proposition 4.13. *Pour p un nombre premier ou 0, la théorie $Th(ACF_p)$ est complète.*

Démonstration. Soient $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ deux modèles de $Th(ACF_p)$. Si $|M| < 2^{\aleph_0}$ (resp. $|N|$), par le théorème de Löwenheim-Skolem ascendant il existe $\mathcal{M}_1$ (resp. $\mathcal{N}_1$) tel que $\mathcal{M} \preceq \mathcal{M}_1$ et $|M_1| = 2^{\aleph_0}$ (resp. $\mathcal{N} \preceq \mathcal{N}_1$ et $|N_1| = 2^{\aleph_0}$). Si $|M| \geq 2^{\aleph_0}$ (resp. $|N|$), par le théorème de Löwenheim-Skolem descendant il existe $\mathcal{M}_1$ (resp. $\mathcal{N}_1$) tel que $\mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}$ et $|M_1| = 2^{\aleph_0}$ (resp. $\mathcal{N}_1 \preceq \mathcal{N}$ et $|N_1| = 2^{\aleph_0}$). Dans les deux cas on a trouvé des structures $\mathcal{M}$,$\mathcal{N}_1$ telles que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_1$, $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}_1$ et $|M_1| = |N_1| = 2^{\aleph_0}$. Par le théorème de Steinitz

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_1 \cong \mathcal{N}_1 \equiv \mathcal{N},$$

d'où $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Par l'Observation 4.3, $Th(ACF_p)$ est complète. □

Corollaire 4.14. *Soit φ un $\mathcal{L}_A$-énoncé. Il y a équivalence entre :*

(1) $\mathbb{C} \models \varphi$ *;*

(2) $AFC_0 \models \varphi$ *;*

(3) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $AFC_p \models \varphi$ pour tout $p > N$.

Démonstration. L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) suit da la Proposition 4.13, (2) $\Rightarrow$ (3) suit du théorème de Compacité et (2) $\Rightarrow$ (3) suit encore une fois de la Proposition 4.13 cette fois si en utilisant la négation de φ. □

Voici une application ingénieuse du Corollaire précédent démontré indépendamment par Ax et par Grothendieck :

Théorème 4.15 (Ax-Grothendieck)**.** *Soit $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ une application polynomiale. Alors si P est injective, P est bijective.*

On utilisera tout d'abord le Nullstellensatz pour montrer le résultat analogue pour la clôture algébrique d'un corps fini. On dénotera par $\mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}}$ la clôture algébrique du corps fini $\mathbb{F}_p$.

Proposition 4.16. *Soit $P : (\mathbb{F}_p^{alg})^n \to (\mathbb{F}_p^{alg})^n$ une application polynomiale. Alors si P est injective, P est bijective.*

Démonstration. Soient $P_1, \ldots, P_n$ des polynômes tels que $P(x) = (P_1(x), \ldots, P_n(x))$. Supposons que l'application P soit injective mais pas surjective. Notons que P est injective si et seulement si pour $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, le système d'équations

$$\{X \neq Y\} \cup \{P_i(X) = P_i(Y) : i = 1, \ldots, n\},$$

n'admet pas de solution. Par le Nullstellensatz, il existe $R(X, Y)$ tel que

$$\prod_{i=1}^{n}(P_i(x) - P_i(y))R(X, Y) = (X - Y)^r\}.$$

De même le fait que P soit pas surjective nous dit qu'il existe $a \in \mathbb{F}_p^n$ tel que $P(X) - a = 0$ n'as pas de solution, donc

$$(P(X) - a)Q(X) = 1\}.$$

Soit C l'ensemble de tous les coefficients qui apparaissent dans P, R, Q et a. Alors le corps engendré par C est un corps fini qui témoigne avoir une application polynomiale qui est injective mais pas surjective, une contradiction. □

Démonstration du Théorème 4.15 : Supposons que P soit injective mais pas surjective. Soient $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{C}[X]$ les polynômes tels que $P = (P_1(X), \ldots, P_n(X))$. Pour $i = 1, \ldots, n$, soit $J_i \subseteq \mathbb{N}^n$ tel que $P_i = \sum_{j \in J_i} c_{ij} X^j$ pour $c_{ij} \in \mathbb{C}$. Alors il existent $a, b \in \mathbb{C}^n$ tels que

$$\mathbb{C} \models a \neq b \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \sum_{j \in J_i} c_{ij} a^j = \sum_{j \in J_i} c_{ij} b^j.$$

Alors pour l'énoncé

$$\varphi := \exists x \exists y \exists c(x \neq y \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \sum_{j \in J_i} c_{ij} x^j = \sum_{j \in J_i} c_{ij} y^j,$$

on a que $\mathbb{C} \models \varphi$. De même, l'énoncé

$$\psi := \exists z \forall x \bigvee_{i=1}^{n} \sum_{j \in J_i} c_{ij} x^j \neq z_i.$$

est vrai dans $\mathbb{C}$. Soit $\theta = \varphi \wedge \psi$. On a bien que $\mathbb{C} \models \varphi \wedge \psi$. Comme $Th(ACF_0)$ est complète, cela implique que $ACF_0 \models \theta$. Par compacité, θ est conséquence logique d'une partie finie $\Sigma_0 \subseteq ACF_0$. Or cela implique qu'il existent des corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ qui sont modèles de θ, ce qui contredit la proposition 4.16. □

5. Ultraproduits

5.1. **Filtres et ultrafiltres.**

Définition 5.1. Soit X un ensemble non-vide. Un *filtre sur* X est une famille $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(F2) si $A, B \in \mathcal{F}$ alors $A \cap B \in \mathcal{F}$;

(F3) Si $A \in \mathcal{F}$ et $A \subseteq B$ pour $B \in \mathcal{F}$, alors $B \in \mathcal{F}$.

Exemples 5.2.

(1) Le *filtre trivial* sur X est $\mathcal{F} = \{X\}$.

(2) Pour $A \in \mathcal{P}(X)$ non-vide, le filtre engendré par A c'est le filtre $\mathcal{F}_A := \{B \in \mathcal{P}(X) : A \subseteq B\}$. On laisse le lecteur se convaincre que $\mathcal{F}_A$ est bien un filtre. Quand $A = \{a\}$, un appelle un tel filtre *un filtre principal* et on le note aussi par $\mathcal{F}_a$. Notons aussi que le filtre trivial correspond au filtre $\mathcal{F}_X$.

(3) Pour X infini, *le filtre de Fréchet* sur X, noté $\mathcal{F}_{Fr}$, est la famille des sous-ensembles cofinis de X. De même, on laisse le lecteur se convaincre qu'il s'agit bien d'un filtre. Notons aussi que ce filtre n'est pas engendré par aucun sous-ensemble de X.

Exercice 5.3.

(1) Monter que si X est un ensemble fini alors tout filtre sur X est un filtre engendré.

(2) Soit X un ensemble infini. Montrer que le filtre de Fréchet n'est pas un filtre engendré.

Notons qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur X satisfait toujours la propriété des intersections finis FIP (par son nom en anglais) :

(FIP) Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{F}$ est non-vide.

On peut se demander si une sous-partie $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ peut engendrer un filtre. Le candidat naturel c'est le plus petit ensemble contenant S qui est clos par rapport aux conditions (F2) et (F3). Il est facile à voir que cet ensemble, qu'on notera $\mathcal{F}(S)$, correspond à

$$\mathcal{F}(S) := \bigcup_{A \in S'} \mathcal{F}_A,$$

où S' est la clôture de S par intersections finies. Le lemme suivant nous donne une caractérisation des S pour lesquels $\mathcal{F}(S)$ est un filtre. Notons bien que avec cette notation on a $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}(\{A\})$.

Lemme 5.4. *Soit $S \subseteq P(X)$. Alors $\mathcal{F}(S)$ est un filtre si et seulement si S a la FIP.*

Démonstration. De droite à gauche, le résultat est trivial car tout filtre à la FIP et $\mathcal{F}(S)$ contient S. De gauche à droite, la FIP implique que $\emptyset \notin \mathcal{F}(S)$ et par construction $\mathcal{F}(S)$ satisfait bien les conditions (F2) et (F3). □

Dorénavant X sera un ensemble infini et tous les filtres seront des filtres sur X sauf mention du contraire.

Définition 5.5. Un filtre $\mathcal{F}$ est un *ultrafiltre* s'il est maximal par rapport à l'inclusion, c'est-à-dire, si pour tout filtre $\mathcal{G}$ on a

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G}.$$

Exercice 5.6.

(1) Monter que tout filtre principal est un ultrafiltre.

(2) Montrer que si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre non-principal alors il contient le filtre de Fréchet.

Existent-ils des ultrafiltres non-principales ? Leur existence est équivalente à une version faible de l'axiome du choix, est elle découle du lemme suivant :

Lemme 5.7 (Lemme de l'ultrafiltre)**.** *Tout filtre $\mathcal{F}$ est contenu dans un ultrafiltre.*

Démonstration. On peut vérifier que l'ensemble des filtres contenant $\mathcal{F}$ ordonné par l'inclusion est un ensemble ordonné inductif. Par le lemme de Zorn il existe donc un élément maximal qui est bien un ultrafiltre contenant $\mathcal{F}$. $\square$

Le lecteur intéressé sur la relation entre le lemme de l'ultrafiltre et l'axiome du choix peut lire plus dans [**?**]. Par lemme de l'ultrafiltre il existent en effet donc des ultrafiltres non-principaux sur tout ensemble infini X, puisqu'il existent des ultrafiltres contenant le filtre de Fréchet sur X.

Voici les propriétés principales qu'on va utiliser par la suite sur les ultrafiltres :

Proposition 5.8. *Soit $\mathcal{F}$ un filtre. On a équivalence entre*

(1) $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre ;

(2) si $A \cup B \in \mathcal{F}$ alors soit $A \in \mathcal{F}$ ou $B \in \mathcal{F}$;

(3) pour tout $A \subseteq X$ on a ou bien $A \in \mathcal{F}$ ou bien $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Démonstration.
(1) $\Rightarrow$ (2) : on montre la contraposée, donc supposons qu'il existent $A, B \subseteq X$ tels que $A \cup B \in \mathcal{F}$ mais ni A ni B appartiennent à $\mathcal{F}$. Il suffit de montrer que soit $S_1 = \mathcal{F} \cup \{A\}$ soit $S_2 = \mathcal{F} \cup \{A\}$ a la FIP. En effet, si l'un des S_i pour $i = 1, 2$ a la FIP alors par le Lemme FIP et le lemme de l'ultrafiltre il existe un ultrafiltre contenant S_i, ce qui montre que $\mathcal{F}$ n'est pas un ultrafiltre. Supposons par l'absurde ni S_1 ni S_2 a la FIP. Donc il existent $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$ tels que $A \cap C_1 = \emptyset$ et $B \cap C_2 = \emptyset$. Or $C = C_1 \cap C_2 \in \mathcal{F}$ et $(A \cup B) \cap C = \emptyset$, ce qui contredit que $A \cup B \in \mathcal{F}$.
(2) $\Rightarrow$ (3) : cela suit directement car $A \cup (X \setminus A) = X \in \mathcal{F}$.
(3) $\Rightarrow$ (1) : on montre la contraposée, donc supposons qu'il existe un filtre $\mathcal{G}$ contenant strictement $\mathcal{F}$. Considérons $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. On ne peut pas avoir $X \setminus A \in G$ puisque $\mathcal{G}$ est un filtre, d'où $X \setminus A \notin \mathcal{F}$. Cela montre que ni A ni $X \setminus A$ appartiennent à $\mathcal{F}$, or leur union est X qui appartient à tout filtre. $\square$

La section suivante est une parenthèse pour motiver la notion d'ultrafiltre. Aucune définition ni aucun résultat de cette section sera requis par la suite.

5.2. **Ultraproduits.**

Définition 5.9. Soit $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$, une famille de $\mathcal{L}$-structures. On définit une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ sur le produit cartésien $\prod_{i\in I} M_i$ de la façon suivante :

- pour c est un symbole de constante, $c^{\mathcal{M}}$ est la suite $(c(i)^{\mathcal{M}_i})_{i\in I}$;
- pour f un un symbole de fonctions d'arité $n > 0$, et des suites $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i\in I} M_i$
$$f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = (f^{\mathcal{M}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)))_{i\in I}$$
- pour R un un symbole de relation d'arité n et des suites $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i\in I} M_i$
$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow (a_1(i), \ldots, a_n(i)) \in R^{\mathcal{M}_i} \text{ pout tout } i \in I.$$

On dénote aussi la structure $\mathcal{M}$ par $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i$.

Le lecteur peut se convaincre sans difficulté du lemme suivant. On démontrera plus tard un résultat plus général qui l'implique (voir 5.15).

Lemme 5.10. *Soit* $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ *une famille de* $\mathcal{L}$*-structures.*

(1) Soit $\varphi(x)$ *une formule atomique avec* $|x| = n$ *et* $a_1, \ldots, a_n$ *des éléments de* $\prod M_i$*. Alors,*

$$\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{M}_i \models \varphi(a_1(i), \ldots, a_n(i)) \text{ pour tout } i \in I.$$

(2) Pour chaque $i \in I$*, la projection canonique* $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i \to \mathcal{M}_i$ *est un morphisme.*

Notons qu'on ne peut pas généraliser la partie (1) à l'ensemble de toutes les formules. Considérons par exemple deux anneaux intègres non-triviaux $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. On a donc que

$$\mathcal{M}_i \models \forall xy(xy = 0 \to (x = 0 \wedge y = 0)),$$

pour $i = 1, 2$, mais que leur produit $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ n'est pas intègre car $(0, 1)(1, 0) = (0, 0)$. On ne peut même pas généraliser la partie (1) à l'ensemble des formules sans quantificateurs. On laisse le lecteur chercher un example. Les filtres et les ultrafiltres sont introduits précisément pour éviter se problème.

Lemme 5.11. *Soient* I *un ensemble non-vide,* $\mathcal{F}$ *un filtre sur* I *et* $(M_i)_{i\in I}$ *une famille d'ensembles non-vides. La relation sur* $\prod M_i$ *définit par*

$$a \sim_{\mathcal{F}} b \Leftrightarrow \{i \in I : a(i) = b(i)\} \in \mathcal{F},$$

est une relation d'équivalence.

Démonstration. Elle est réflexive car l'ensemble I appartiens à tout filtre sur I. Elle est trivialement symétrique. Supposons $a \sim_{\mathcal{F}} b$ et $b \sim_{\mathcal{F}} c$, donc $A = \{i \in I : a(i) = b(i)\} \in \mathcal{F}$ et $B = \{i \in I : b(i) = c(i)\} \in \mathcal{F}$. On a bien que $A \cap B \in \mathcal{F}$ et $A \cap B \subseteq \{i \in I : a(i) = c(i)\}$ ce qui montre que $a \sim_{\mathcal{F}} c$. □

Pour $a \in \prod M_i$ on dénotera $a/\mathcal{F}$ la classe d'équivalence de a par la relation $\sim_{\mathcal{F}}$. Étant donné $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i)$ on écrira $a/\mathcal{F}$ pour dénoter l'uplet $((a_1)/\mathcal{F}, \ldots, (a_n)/\mathcal{F})$. De même, pour $i \in I$, $a(i)$ dénotera l'uplet $(a_1(i), \ldots, a_n(i))$.

Définition 5.12. Soient I un ensemble non-vide, $\mathcal{F}$ un filtre sur I et $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures. On définit une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ sur l'ensemble $\prod_{i\in I} M_i/ \sim_{\mathcal{F}}$ par :

- pour c un symbole de constante, $c^{\mathcal{M}} = (c^{\mathcal{M}_i})/\mathcal{F}$;
- pour f un un symbole de fonctions d'arité $n > 0$, et $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (\prod_{i\in I} M_i)^n$

$$f^{\mathcal{M}}(a/\mathcal{F}) = (f^{\mathcal{M}_i}(a(i)))/\mathcal{F}$$

- pour R un un symbole de relation d'arité n

$$a/\mathcal{F} \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \{i \in I : a(i) \in R^{\mathcal{M}_i}\} \in \mathcal{F}.$$

la structure $\mathcal{M}$ est appelé le *produit réduit de* $(\mathcal{M}_i)$ *sur* $\mathcal{F}$. On la dénote par $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{F}$. S'il existe une structure $\mathcal{N}$ telle que pour tout $i \in I$ la structure $\mathcal{M}_i$ est $\mathcal{N}$, alors on appelle $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/ \sim_{\mathcal{F}}$ *la puissance réduite* et on la dénote aussi par $\mathcal{N}^I/\mathcal{F}$.

On montre que la définition ci-dessus ne dépend pas des représentants. Soient $a, b \in (\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i)^n$ telles que $a_j \sim_{\mathcal{F}} b_j$ pour $j = 1, \ldots, n$. Alors $A_j = \{i \in I : a_j(i) = b_j(i)\} \in \mathcal{F}$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. Leur intersection $\bigcap_{j=1}^n A_j$ est aussi dans $\mathcal{F}$ et ainsi :

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j \subseteq \{i \in I : a_j(i) = b_j(i), \text{ pour tout } j \in \{1, \ldots, n\}\} \in \mathcal{F}.$$

Cela montre que

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{M}}((a_1)_{\mathcal{F}}, \ldots, (a_n)_{\mathcal{F}}) &= (f^{\mathcal{M}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)))_{\mathcal{F}} \\ &= (f^{\mathcal{M}_i}(b_1(i), \ldots, b_n(i)))_{\mathcal{F}} \\ &= f^{\mathcal{M}}((b_1)_{\mathcal{F}}, \ldots, (b_n)_{\mathcal{F}}), \end{aligned}$$

donc $f^{\mathcal{F}}$ est bien définie. De même, on a

$$\begin{aligned} ((a_1)_{\mathcal{F}}, \ldots, (a_n))_{\mathcal{F}}) \in R^{\mathcal{M}} &\Leftrightarrow \{i \in I : (a_1(i), \ldots, a_n(i)) \in R^{\mathcal{M}_i}\} \in \mathcal{F} \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : (b_1(i), \ldots, b_n(i)) \in R^{\mathcal{M}_i}\} \in \mathcal{F} \\ &\Leftrightarrow ((b_1)_{\mathcal{F}}, \ldots, (b_n))_{\mathcal{F}}) \in R^{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

Définition 5.13. Soient I, $\mathcal{F}$ et $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ comme dans la définition précédente. Si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre alors le produit réduit $\prod i \in I\mathcal{M}_i/\sim_{\mathcal{F}}$ est appelé un *ultraproduit*. La puissance réduite $\mathcal{N}^I/\mathcal{F}$ est appelé dans ce cas une *ultrapuissance de* $\mathcal{N}$.

Lemme 5.14. *Soient I, $\mathcal{F}$ et $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ comme dans la définition précédente, $\mathcal{M} = \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{F}$ le produit réduit, $t(x)$ un terme avec $|x| = n$ et $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (\prod_{i\in I} M_i)^n$. Alors,*

$$t^{\mathcal{M}}(a/\mathcal{F}) = (t^{\mathcal{M}_i}(a(i)))/\mathcal{F}.$$

Démonstration. Par induction sur les termes. □

Voici une première généralisation du Lemme 5.10 :

Lemme 5.15. *Soient I, $\mathcal{F}$ et $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ comme dans la définition précédente, $\varphi(x)$ une formule atomique avec $|x| = n$ et $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (\prod_{i\in I} M_i)^n$. Alors,*

$$\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{F} \models \varphi(a/\mathcal{F})) \Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \varphi(a(i))\} \in \mathcal{F}.$$

Démonstration. Les cas $\top$ and $\bot$ sons triviaux. Si $\varphi(x)$ est la formule $Rx_1, \ldots x_n$, le résultat suit de la définition. Finalement, si $\varphi(x)$ est la formule $t_1(x) = t_2(x)$ pour t_1, t_2 des termes, par le Lemme 5.14 on a que

$$\begin{aligned} \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{F} \models t_1(a/\mathcal{F}) = t_2(a/\mathcal{F}) &\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{M}}(a/\mathcal{F}) = t_2\mathcal{M}(a/\mathcal{F}) \\ &\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}_i}(a(i))/\mathcal{F} = (t_2^{\mathcal{M}_i}(a(i)))/\mathcal{F} \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M}_i \models t_1^{\mathcal{M}_i}(a(i)) = t_2^{\mathcal{M}_i}(a(i))\}. \end{aligned}$$

□

Notons que le Lemme 5.10 deviens un cas particulier en prenant le filtre trivial $\mathcal{F} = \{I\}$. Le cas plus intéressant correspond au cas où $\mathcal{F}$ est un ultraproduit. La bonne généralisation de la partie (1) du Lemme 5.10 c'est le résultat suivant.

Théorème 5.16 (Théorème de Łos)**.** *Soient I un ensemble, $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur I, $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures, $\varphi(x)$ une formule avec $|x| = n$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i)^n$. Alors,*

$$\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{F} \models \varphi(a/\mathcal{F}) \Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \varphi(a(i))\} \in \mathcal{F}.$$

En particulier si φ est un énoncé on a que

$$\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{F} \models \varphi \Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \varphi\} \in \mathcal{F}.$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur $\varphi(x)$. Le cas atomique est déjà compris dans le Lemme 5.15. Supposons que $\varphi(x)$ soit de la forme $\neg\psi(x)$. Alors, par la proposition 5.8 et l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{F} \models \neg\varphi(a/\mathcal{F})) &\Leftrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{F} \not\models \varphi(a/\mathcal{F}) \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \varphi(a(i))\} \notin \mathcal{F}. \\ &\Leftrightarrow I \setminus \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \varphi(a(i))\} \in \mathcal{F}. \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \neg\varphi(a(i))\} \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Supposons que $\varphi(x)$ soit de la forme $(\psi \wedge \theta)(x)$. Ici on utilise juste le fait que $\mathcal{F}$ est un filtre et la preuve et rutinaire. Pour finir, supposons que $\varphi(x)$ soit une formule de la forme $\exists y\psi(x, y)$. Encore une fois on utilise que $\mathcal{F}$ soit un filtre

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{F} \models \exists y\psi(a/\mathcal{F}), y) &\Leftrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{F} \models \psi(a/\mathcal{F}), b/\mathcal{F}) \text{ pour un } b \in \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i \\ &\Leftrightarrow A = \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \psi(a(i), b(i))\} \in \mathcal{F}. \\ &\Leftrightarrow A \subseteq \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \exists y\psi(a(i), y)\} \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème de Compacité : Soit I l'ensemble des parties finies de Σ. Par hypothèse, pour tout $\Delta \in I$, il existe une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}_\Delta$ telle que $\mathcal{M}_\Delta \models \Delta$. Pour chaque énoncé $\varphi \in \Sigma$, soit

$$U_\varphi := \{\Delta \in I : \varphi \in \Delta\}.$$

Prenons $S = \{U_\varphi : \varphi \in \Sigma\}$. On montre que S a la FIP. En effet, si $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Sigma$, alors pour chaque $1 \leq i \leq n$

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \in U_{\varphi_i}$$

car il contient φ_i, d'où

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \in U_{\varphi_1} \cap \dots \cap U_{\varphi_n},$$

ce qui montre que S a la FIP. Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre contenant S, qui existe par les Lemmes 5.4 et 5.7. On montre que $\mathcal{M} := \prod_{\Delta \in I} \mathcal{M}_\Delta/\mathcal{F}$ est un modèle de Σ. Pour $\varphi \in \Sigma$ et le fait que $\mathcal{M}_\Delta \models \Delta$,

$$U_\varphi = \{\Delta \in I : \varphi \in \Delta\} \subseteq \{\Delta \in I : \mathcal{M}_\Delta \models \varphi\}.$$

Comme $U_\varphi \in \mathcal{F}$, alors $\{\Delta \in I : \mathcal{M}_\Delta \models \varphi\} \in \mathcal{F}$, et par le théorème de Łos, cela montre exactement que $\mathcal{M} \models \varphi$. □

Annexe A. Écriture unique

Dans cet annexe on démontre on résultat générale d'écriture unique pour les *mots admissibles* sur un alphabet F. Étant donné un ensemble F, les mots sur F c'est l'ensemble F^* des suites finies $f_1 f_2 \cdots f_n$ où chaque f_i est un élément de F. La longueur du mot $f_1 f_2 \cdots f_n$ correspond à l'entier n et sera noté par $l(f_1 \cdots f_n) = n$. Le mot vide correspond à l'unique mot de longueur $n = 0$. L'ensemble F^* peut être traité comme un monoïde muni de l'opération de concaténation en prenant le mot vide comme l'élément neutre.

Soit F un ensemble et $a : F \to \mathbb{N}$ une fonction. Pour $f \in F$, on appelé l'entier $a(f)$ *l'arité de* f ou le *poids de* f. Finalement, on définit l'ensemble des mots admissibles sur (F, a) comme le plus petit sous -ensemble de F^* tel que :

(1) tout $f \in F$ tel que $a(f) = 0$ est un mot admissible sur (F, a) ;
(2) si $f \in F$ est d'arité $n > 0$ et $t_1, \ldots, t_n$ sont des mots admissibles sur (F, a), alors la concaténation $f t_1 \cdots t_n$ est un mot admissible sur (F, a).

Par la suite on omet la mention 'sur (F, a)' en écrivant juste "mot admissible". Notons que le mot vide n'est pas admissible.

Exemple A.1. Pour $\mathcal{L}$ un langage, les $\mathcal{L}$-termes correspondent aux mots admissibles sur l'alphabet $F := \mathcal{L}^{\mathfrak{f}} \cup \mathrm{Var}_{\mathcal{L}}$ où la fonction $a : F \to \mathbb{N}$ est définit par

$$\begin{cases} a(x) = 0 & \text{pour } x \in \mathrm{Var}_{\mathcal{L}} \\ a(f) = n & \text{pour } f \in \mathcal{L}^{\mathfrak{f}} \text{ d'arité } n. \end{cases}$$

Proposition A.2. *Soient $t_1, \ldots, t_m$ et $u_1, \ldots, u_n$ de mots admissibles et w un mot quelconque sur F tel que $t_1 \ldots t_m w = u_1 \ldots u_n$. Alors $m \leq n$, $t_i = u_i$ pour $i = 1, \ldots, m$ et $w = u_{m+1} \ldots u_n$.*

Démonstration. Par récurrence sur la longueur l de $u_1 \ldots u_n$. Si $l = 0$, alors $m = n = 0$ et w c'est le mot vide. On suppose $l > 0$ et que le lemme est vrai pour les mot de plus petite longueur. Notons que $n > 0$. Si $m = 0$, le lemme est trivial donc supposons $m > 0$. Le premier symbole de t_1 est égal au premier symbole de u_1. Supposons que ce symbole soit $h \in F$ d'arité k. Alors $t_1 = h a_1 \ldots a_k$ et $u_1 = h b_1 \ldots b_k$ où $a_1, \ldots, a_k$ et $b_1, \ldots, b_k$ sont des mots admissibles. Supprimer le symbole h nous donne

$$a_1 \ldots a_k t_2 \ldots t_m w = b_1 \ldots b_k u_2 \ldots u_n,$$

(attension : ici k, $m - 1$ et $n - 1$ peuvent être 0). La longueur du mot

$$b_1 \ldots b_k u_2 \ldots u_n) = l - 1,$$

donc par récurrence, on a que $k + m - 1 \leq k + n - 1$ (d'où $m \leq n$) et $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$ (donc $t_1 = u_1$), $t_2 = u_2, \ldots, t_m = u_m$ et $w = u_{m+1}, \ldots, u_n$. □

En particulier, si $t_1, \ldots, t_m$ et $u_1, \ldots, u_n$ sont des mots admissible tels que $t_1 \ldots t_m = u_1 \ldots u_n$, alors $m = n$ et $t_i = u_i$ pour $i = 1, \ldots, m$. Cela nous donne :

Corollaire A.3. *(Écriture unique) Chaque mot admissible t est égal a $ft_1 \ldots t_n$ pour un unique uplet $(f, t_1, \ldots, t_n)$ où $f \in F$ est d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des mots admissibles.*

Ce corollaire nous permet de définir "la complexité" où "la hauteur" des mots admissibles de la façon suivante :

Définition A.4. Pour un mot admissible t la complexité (ou la hauteur) de t, notée $h(t)$, est un entier non-négatif défini par récurrence sur la longueur $l(t)$ du mot t par :

(1) Si $l(t) = 1$, alors $h(t) = 0$.

(2) Si $l(t) > 1$, alors par l'écriture unique, $t = ft_1 \cdots t_n$ avec f d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ des mots admissibles. Dans ce cas on définit $h(t) = 1 + \max\{h(t_1), \ldots, h(t_n)\}$.

Une récurrence sur la complexité des mots admissibles ou sur la hauteur des mots admissibles sera par définition une récurrence sur $h(t)$. On appelle cet entier la hauteur car il correspond à la hauteur d'un arbre fini qu'on peut associer à chaque mot admissible. On laisse au lecteur définir formellement cette correspondance entre mots admissibles et arbres finis et en faisant juste un exemple.

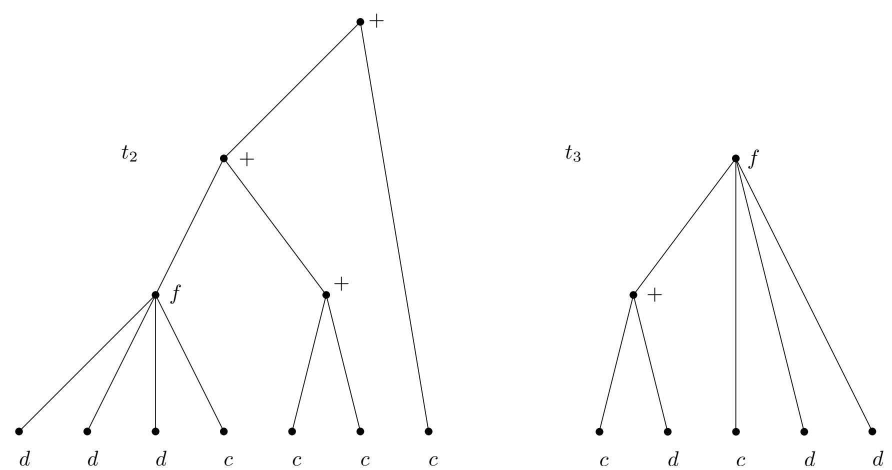
Exemple A.5. Soit $F := \{c, d, +, f\}$ et $a : F \to \mathbb{N}$ donné par $a(c) = a(d) = 0$, $a(+) = 2$ et $a(f) = 4$. Considérons les mots

(1) $t_1 = ++cdcd$,

(2) $t_2 = ++fdddc+ccc$,

(3) $t_3 = f+cdcdd$.

Il n'est pas difficile de se convaincre que t_1 n'est pas admissible et que t_2, t_3 sont des mots admissibles. Les arbres finis qu'on peut leur associer sont :



On peut voir que la hauteur de chaque arbre (les feuilles étant de hauteur 0) est égale aux valeurs respectives de la fonction h.

Références

1. Joris van der Hoeven Matthias Aschenbrenner, Lou van den Dries, *Asymptotic differential algebra and model theory of transseries*, arXiv :1509.02588, 2015.
2. J.R. Shoenfield, *Mathematical logic*, Ak Peters Series, Association for Symbolic Logic, 2001.
3. A. Tarski and R. Vaught, *Arithmetical extensions of relational systems*, Compositio Math **13** (1956).
4. Alfred Tarski, *Einige methodologische Untersuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe*, Erkenntnis **5** (1935), 80–100, Translated as 'Some methodological investigations on the definability of concepts' in [5] pp. 296–319.
5. ———, *Logic, Semantics, Metamathematics : papers from 1923 to 1938*, Hackett Publishing Company, Indianapolis, Indiana, 1983, (John Corcoran, Ed.).