Universidad de los Andes
Ecuaciones Diferenciales (202210)
Parcial 4 - Jueves 19 de mayo de 2022

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

- No se permite el uso de apuntes de clase o libros durante el parcial. Solamente se permite el uso de lápiz, lapicero, borrador y sacapuntas.
- No se permite el uso de aparatos electrónicos. Estos deben permanecer apagados y guardados.
- La duración del parcial es de 80 minutos.
- **Respuesta sin justificación será calificada con cero (0.0).**
- No se admiten hojas extras. **Cualquier hoja extra será considerada fraude.** En este examen encontrará espacio suficiente para desarrollar los ejercicios.

Nombre:______________________________ Código:______________

Problema	P. 1	P. 2	P. 3	Total sobre 50
Nota obtenida				

[Prob. 1] **(15 Pts)** Considere el problema

$$\alpha^2 u_{xxx} = u_{xtt},$$

con las condiciones $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$, $u_x(x,0) = f(x)$ y $u_{xt}(x,0) = 0$.

(a) **(+3 Pts)** Realice la sustitución $v(x,t) = u_x(x,t)$, reescriba la ecuación diferencial y sus nuevas condiciones.

(b) **(+10 Pts)** Resuelva la **nueva ecuación** diferencial utilizando el método de **separación de variables** $v(x,t) = X(x)T(t)$.

Ayuda: La ecuación resultante es la ecuación de onda. Al igualarla a $-\lambda$ puede asumir que solo se tiene soluciones para $\lambda > 0$ sin revisar los otros casos.

(c) **(+2 Pts)** Encuentre la función u intengrando v con respecto a x. Tenga especial atención en la *constante de integración.*

(PÁGINA ADICIONAL)

(PÁGINA ADICIONAL)

[Prob. 2] **(20 Pts)** Muestre la siguiente igualdad

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Ayuda: Revise la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 2 \end{cases}, \qquad f(x+4) = f(x).$$

y evalúe en $x = 0$.[1]

[1]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right),$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x, \qquad b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x$$

(PÁGINA ADICIONAL)

[Prob. 3] **(15 Pts)** Considere el siguiente problema: Para una matrix cuadrada A se desea resolver la ecuación diferencial

$$t^2\mathbf{x}'' + t\mathbf{x}' = A\mathbf{x}. \tag{Eul}$$

Esta ecuación se asemeja a la ecuación de Euler $t^n y^{(n)} + t^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + ty' + p(t)y = 0$. El objetivo de este ejercicio es resolver la ecuación (Eul)

(a) **(+5 Pts)** Suponga que la solución es de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{c}t^r$ donde $\mathbf{c}$ es un vector distinto a cero y $r \in \mathbb{R}$. Reescriba el problema usando esta sustitución.

(b) **(+3 Pts)** Usando la sustitución anterior, muestre que $\mathbf{c}$ es vector propio de la matriz A y que r^2 es igual al valor propio de la matriz A correspondiente a $\mathbf{c}$. Concluya que por cada valor propio se pueden hallar dos valores de r, el positivo y el negativo y cada valor de r dará una solución al reemplazar en $\mathbf{c}t^r$.

(c) **(+7 Pts)** Use lo desarrollado en los puntos (3a) y (3b) para resolver el problema (Eul) con la matrix A igual a

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tenga en cuenta que cada r distinto da una soluciones distintas de la forma $\mathbf{c}t^r$.

(PÁGINA ADICIONAL)

(PÁGINA ADICIONAL)