Universidad de los Andes
Ecuaciones Diferenciales (202210)
Parcial 4 (Solución) - Jueves 19 de mayo de 2022

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25

- No se permite el uso de apuntes de clase o libros durante el parcial. Solamente se permite el uso de lápiz, lapicero, borrador y sacapuntas.
- No se permite el uso de aparatos electrónicos. Estos deben permanecer apagados y guardados.
- La duración del parcial es de 80 minutos.
- **Respuesta sin justificación será calificada con cero (0.0).**
- No se admiten hojas extras. **Cualquier hoja extra será considerada fraude.** En este examen encontrará espacio suficiente para desarrollar los ejercicios.

Nombre:____________________ Código:__________

Problema	P. 1	P. 2	P. 3	Total sobre 50
Nota obtenida				

[Prob. 1] **(15 Pts)** Considere el problema

$$\alpha^2 u_{xxx} = u_{xtt},$$

con las condiciones $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$, $u_x(x,0) = f(x)$ y $u_{xt}(x,0) = 0$.

(a) **(+3 Pts)** Realice la sustitución $v(x,t) = u_x(x,t)$, reescriba la ecuación diferencial y sus nuevas condiciones.

(b) **(+10 Pts)** Resuelva la **nueva ecuación** diferencial utilizando el método de **separación de variables** $v(x,t) = X(x)T(t)$.

Ayuda: La ecuación resultante es la ecuación de onda. Al igualarla a $-\lambda$ puede asumir que solo se tiene soluciones para $\lambda > 0$ sin revisar los otros casos.

(c) **(+2 Pts)** Encuentre la función u intengrando v con respecto a x. Tenga especial atención en la *constante de integración.*

Sol.: (a) Con la sustitución $v(x,t) = u_x(x,t)$ obtenemos que $u_{xxx}(x,t) = v_{xx}$ y $u_{xtt}(x,t) = v_{tt}$. La ecuación queda de la forma

$$\alpha^2 v_{xx} = v_{tt}$$

Esta es la ecuación de onda, pues las condiciones iniciales para $v(x,t)$ queda como $v(0,t) = v(1,t) = 0$, $v(x,0) = f(x)$ y $v_t(x,0) = 0$.

(b) Suponiendo que la solución se ve como $v(x,t) = X(x)T(t)$ obtenemos que la ecuación $\alpha^2 X''T = XT''$. Despejando obtenemos

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{\alpha^2 T} = -\lambda.$$

Las condiciones iniciales quedan de la forma $X(0) = 0$, $X(1) = 0$. Entonces resolvemos

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \quad X(L) = 0.$$

Solo hay para $\lambda > 0$ en el cual $\lambda = n^2\pi^2$ (los valores propios) y $X_n(x) = \sin(n\pi x)$ (las funciones propias). La otra ecuación es

$$T'' + \lambda\alpha^2 T = 0, \qquad T'(0) = 0.$$

La solución es $T_n(t) = \cos(n\pi\alpha t)$. Entonces

$$v_n(x,t) = \sin(n\pi x)\cos(n\pi\alpha t).$$

Usando Fourier obtenemos que la solución propuesta es

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) \cos(n\pi \alpha t) \,.$$

La última condición de la ecuación de onda es $v(x,0) = f(t)$, entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) \,.$$

Por la ortogonalidad obtenemos que $c_n = 2\int_0^1 f(s)\sin(n\pi s)\, \mathrm{d}s$.

(c) Como

$$u_x(x,t) = v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) \cos(n\pi \alpha t) \,.$$

Integramos con respecto a x para obtener la función $u(x,t)$.

$$u(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_n}{n\pi}\right) \cos(n\pi x) \cos(n\pi \alpha t) + h(t).$$

[Prob. 2] **(20 Pts)** Muestre la siguiente igualdad

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Ayuda: Revise la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 2 \end{cases}, \qquad f(x+4) = f(x).$$

y evalúe en $x = 0$.[1]

Sol.: En este caso $L = 2$ y la función es par, entonces $b_n = 0$ para todo n y

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x) \cos(\pi n x/2) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^{0} (-x) \cos(\pi n x/2) \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x \cos(\pi n x/2) \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{0}^{2} x \cos(\pi n x/2) \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x \cos(\pi n x/2) \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \int_{0}^{2} x \cos(\pi n x/2) \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Integrando por partes con $u = x$ y $\mathrm{d}v = \cos(\pi n x/2)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{2x}{\pi n} \sin(\pi n x/2) \bigg|_0^2 - \frac{2}{\pi n} \int_0^2 \sin(\pi n x/2) \, \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{2}{\pi n} \right)^2 \cos\left(\frac{\pi n x}{2} \right) \bigg|_0^2 = \frac{4((-1)^n - 1)}{(\pi n)^2} \\ &= \begin{cases} -8/(\pi n)^2, & \text{si } n \text{ impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ par} \end{cases} \end{aligned}$$

El término a_0 es $1/2 \int_{-2}^{2} f(x) \, \mathrm{d}x = 2$. Entonces la serie es

$$f(x) = 1 - 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (2n+1)^2} \cos(n \pi x/2)$$

Evaluando en $x = 0$ obtenemos

$$0 = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (2n+1)^2} \cos(0)$$

$$\begin{aligned} \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

[1]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{m \pi x}{L} \right) + b_m \sin\left(\frac{m \pi x}{L} \right) \right),$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \, \mathrm{d}x, \qquad a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n \pi x}{L} \right) \, \mathrm{d}x, \qquad b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n \pi x}{L} \right) \, \mathrm{d}x$$

[Prob. 3] **(15 Pts)** Considere el siguiente problema: Para una matrix cuadrada A se desea resolver la ecuación diferencial

$$t^2\mathbf{x}'' + t\mathbf{x}' = A\mathbf{x}. \tag{Eul}$$

Esta ecuación se asemeja a la ecuación de Euler $t^n y^{(n)} + t^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + ty' + p(t)y = 0$. El objetivo de este ejercicio es resolver la ecuación (Eul)

(a) **(+5 Pts)** Suponga que la solución es de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{c}t^r$ donde $\mathbf{c}$ es un vector distinto a cero y $r \in \mathbb{R}$. Reescriba el problema usando esta sustitución.

(b) **(+3 Pts)** Usando la sustitución anterior, muestre que $\mathbf{c}$ es vector propio de la matriz A y que r^2 es igual al valor propio de la matriz A correspondiente a $\mathbf{c}$. Concluya que por cada valor propio se pueden hallar dos valores de r, el positivo y el negativo y cada valor de r dará una solución al reemplazar en $\mathbf{c}t^r$.

(c) **(+7 Pts)** Use lo desarrollado en los puntos (3a) y (3b) para resolver el problema (Eul) con la matrix A igual a

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tenga en cuenta que cada r distinto da una soluciones distintas de la forma $\mathbf{c}t^r$.

Sol.: (a) Si $\mathbf{x} = \mathbf{c}t^r$ entonces $\mathbf{x}' = \mathbf{c}rt^{r-1}$ y $\mathbf{x}'' = \mathbf{c}r(r-1)t^{r-2}$. Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} t^2\mathbf{x}'' + t\mathbf{x}' &= A\mathbf{x} \\ \mathbf{c}r(r-1)t^r + \mathbf{c}rt^r &= A\mathbf{c}t^r \\ \mathbf{c}r(r-1) + \mathbf{c}r &= A\mathbf{c} \\ \mathbf{c}[r(r-1) + r] &= A\mathbf{c} \\ \mathbf{c}[r^2 - r + r] &= A\mathbf{c} \\ \mathbf{c}r^2 &= A\mathbf{c}. \end{aligned}$$

Si reescribimos $r^2 = \lambda$ entonces

$$\lambda\mathbf{c} = A\mathbf{c}.$$

(b) De la última ecuación que obtuvimos en el item anterior vemos que $\lambda = r^2$ son los valores propios de A y que sus correspondientes vectores propios son $\mathbf{c}$.

(c) Según lo que vimos en los items anteriores, debemos calcular valores y vectores propios. En nuestro caso los valores propios son $\lambda_1 = 9$ y $\lambda_1 = 9$, con vectores propios $\langle 1, 0 \rangle$ y $\langle 1, 5 \rangle$ respectivamente. Dado que $r^2 = \lambda$, tenemos cuatro soluciones: $r_1 = -3$, $r_2 = 3$, $r_3 = -2$, $r_4 = 2$, las dos primeras comparten el mismo vector $\mathbf{c}$, así como las dos últimas.

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t^{-3}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t^{3}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} t^{-2}, \quad \mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} t^{2}.$$

Entonces la solución general a la ecuación es

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t^{-3} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t^{3} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} t^{-2} + c_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} t^{2}.$$