Universidad de los Andes
Ecuaciones Diferenciales (202210)
Parcial 3 (Solución) - Martes 3 de Mayo de 2022

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25

- No se permite el uso de apuntes de clase o libros durante el parcial. Solamente se permite el uso de lápiz, lapicero, borrador y sacapuntas.
- No se permite el uso de aparatos electrónicos. Estos deben permanecer apagados y guardados.
- La duración del parcial es de 80 minutos.
- **Respuesta sin justificación será calificada con cero (0.0).**
- No se admiten hojas extras. **Cualquier hoja extra será considerada fraude.** En este examen encontrará espacio suficiente para desarrollar los ejercicios.

Nombre:
Código:

Problema	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	Total sobre 50
Nota obtenida						

[Prob. 1] **(10 Pts)** Resuelva las siguientes situaciones

(a) **(+5 Pts)** Encuentre un intervalo en el cual la ecuación tiene solución única $(t^2-4)y^{\text{iv}} + t^2 y^{\text{iii}} + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$.

Sol.: Dividiento por $t^2 - 4$ obtenemos

$$y^{\text{vi}} + \frac{t^2}{t^2-4} y^{\text{iii}} + \frac{9}{t^2-4} y = 0$$

Entonces $t^2/(t^2-4)$ y $9/(t^2-4)$ son continuas en $(-2, 2)$. Este sería una posible respuesta.

(b) **(+5 Pts)** Muestre que las funciones 1, $\cos(t)$ y $\sin(t)$ son linealmente independientes usando el Wronskiano.

Sol.: El Wronskiano es

$$W[1, \cos t, \sin t] = \begin{vmatrix} 1 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Como el Wronskiano es siempre distinto a cero entonces son linealmente indepentientes.

[Prob. 2] **(12 Pts)** Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$y^{(\text{iv})} + 2y^{(\text{ii})} + y = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0$$

Ayuda 1: Aparecen dos raíces y cada una de ellas está repetida.

Ayuda 2: No encuentre todas las derivadas de una vez para luego encontrar las constantes. Merjor vaya usando las condiciones conforme a encuentra las derivadas.

Sol.: Resolvemos el problema homogéneo $y^{(\text{iv})} + 2y^{(\text{ii})} + y = 0$. Tomando $y_1(t) = \mathrm{e}^{rt}$ obtenemos que $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$. Las raíces son

$$r = \pm\,\mathrm{i}.$$

Cada una de estas raíces son repetidas. Entonces un conjunto fundamental de soluciones sería

$$\{\cos t, \sin t, t\cos t, t\sin t\}.$$

La solución al problema homogéneo es $y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 t \cos t + C_4 t \sin t$. Para la solución particular asuma que la solución se ve de la forma $y_p(t) = A$. Entonces derivando y reemplazando obtenemos $A = 1$. La solución general al problema es

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 t \cos t + C_4 t \sin t + 1.$$

Ahora solo resta derivar y encontrar las constantes. Dado que $y(0) = 1$ entonces $1 = C_1 + 1$ luego $\boxed{C_1 = 0}$. La solución tiene la forma

$$y(t) = C_2 \sin t + C_3 t \cos t + C_4 t \sin t + 1.$$

Las primera derivada es:

$$y'(t) = C_2 \cos t + C_3 \cos t - C_3 t \sin t + C_4 \sin t + C_4 t \cos t.$$

Como $y'(0) = 0$ entonces $C_2 = -C_3$, y la primera derivada quedaría de la forma

$$y'(t) = -C_3 t \sin t + C_4 \sin t + C_4 t \cos t.$$

La segunda derivada es:

$$\begin{aligned} y''(t) &= -C_3 \sin t - C_3 t \cos t + C_4 \cos t + C_4 \cos t - C_4 t \sin t \\ &= -C_3 \sin t - C_3 t \cos t + 2C_4 \cos t - C_4 t \sin t. \end{aligned}$$

Como $y''(0) = 1$ entonces $\boxed{C_4 = 1/2}$. La tercera derivada es

$$\begin{aligned} y'''(t) &= -C_3 \cos t - C_3 \cos t + C_3 t \sin t - \sin t - C_4 \sin t - C_4 t \cos t \\ &= -2C_3 \cos t + C_3 t \sin t - \frac{3\sin t}{2} - \frac{t\cos t}{2}. \end{aligned}$$

Usando la tercera condición $y'''(0) = 0$ obtenemos $\boxed{C_3 = 0}$. Entonces $\boxed{C_2 = 0}$ y la el resultado final es

$$y(t) = \frac{t \sin t}{2} + 1.$$

[Prob. 3] **(11 Pts)** Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' + y = u_{3\pi}(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Utilizando transformada de Laplace.[1]

Sol.: Aplicamos la transformada y nos queda

$$\begin{aligned}
s^2F(s) - sy(0) - y'(0) + F(s) &= \frac{\mathrm{e}^{-3\pi s}}{s} \\
s^2F(s) - s + F(s) &= \frac{\mathrm{e}^{-3\pi s}}{s} \\
F(s)(s^2+1) &= \frac{\mathrm{e}^{-3\pi s}}{s} + s \\
F(s) &= \frac{\mathrm{e}^{-3\pi s}}{s(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Usando fracciones parciales nos queda

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}.$$

Entonces obtenemos

$$F(s) = \mathrm{e}^{-3\pi s}\,\frac{1}{s} - \mathrm{e}^{-3\pi s}\,\frac{s}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}.$$

La transformada inversa es

$$y(t) = u_{3\pi}(t) - u_{\pi}(t)\cos(t-3\pi) + \cos(t).$$

[1] Transformadas de Laplace

(a) $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$
(b) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s-a)$
(c) $\mathcal{L}\{\sin(at)\} = a/(s^2+a^2)$
(d) $\mathcal{L}\{\cos(at)\} = s/(s^2+a^2)$
(e) $\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = a/(s^2-a^2)$
(f) $\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = s/(s^2-a^2)$
(g) $\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-sc}F(s)$
(h) $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \frac{e^{-sc}}{s}$
(i) $\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c)$

[Prob. 4] **(12 Pts)** Muestre las siguientes propiedades de la transformada de Laplace

(a) $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{ct} f(t)\} = F(s-c)$

(b) $\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$, $c > 0$.

Sol.: Fácil.

[Prob. 5] **(5 Pts)** Responda Falso o Verdadero (no debe justificar).

$\boxed{?}$ Mathematicians will literally imagine a sphere instead of going to therapy.

$\boxed{F}$ La transformada de Laplace existe para toda función f.

$\boxed{V}$ El producto de las transformadas es la transformada de la convolución.

$\boxed{V}$ Es posible encontrar el Wronskiano de las soluciones de una ecuación sin necesidad de resolverla.

$\boxed{V}$ Si y_1, y_2, y_3 son soluciones a una ecuación de segundo grado entonces una de esas funciones es combinación lineal de las otras dos.