

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Ecuaciones Diferenciales (201919)
Parcial 3 - Martes 2 de Julio de 2019

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

- No se permite el uso de apuntes de clase o libros durante el parcial. Solamente se permite el uso de lápiz, lapicero, borrador, sacapuntas y la hoja de fórmulas en su única versión indicada previamente por el profesor.
- No se permite el uso de aparatos electrónicos. Estos deben permanecer apagados y guardados.
- La duración del parcial es de 110 minutos.
- **Respuesta sin justificación será calificada con cero (0.0).**
- No se admiten hojas extras. Cualquier hoja extra será considerada fraude. En este examen encontrará espacio suficiente para desarrollar los ejercicios.

Nombre: _____ Código: _____

Problema	P. 1	P. 2	P. 3	Total sobre 50
Nota obtenida				

[Prob. 1] (15 pts) Considere el problema

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + G(t),$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G(t) = \begin{bmatrix} e^{-it} \\ e^{it} \end{bmatrix},$$

donde i es tal que $i^2 = -1$.

- (a) Muestre que los valores propios asociados al problema homogéneo son $\lambda_1 = 1 - i$ y $\lambda_2 = 1 + i$.
- (b) Muestre que los vectores propios son de la forma

$$a \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde a y b son escalares distintos a cero.

- (c) Encuentre una matriz fundamental $\Psi(t)$.
- (d) Muestre que las columnas de la matriz $\Psi(t)$ son linealmente independientes.
- (e) Encuentre la solución al problema no homogéneo.

(PÁGINA ADICIONAL)

(PÁGINA ADICIONAL)

[Prob. 2] (20 pts) Considere un problema de dos por dos de esta forma

$$(H) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Suponga que $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son soluciones a esta problema para $\alpha < t < \beta$ y que W es el Wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$.

(a) Muestre que si $\mathbf{x}^{(1)} = \langle x_1^{(1)}, x_2^{(1)} \rangle$ y $\mathbf{x}^{(2)} = \langle x_1^{(2)}, x_2^{(2)} \rangle$

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{dx_1^{(1)}}{dt} & \frac{dx_1^{(2)}}{dt} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(2)} & x_1^{(1)} \\ \frac{dx_2^{(1)}}{dt} & \frac{dx_2^{(2)}}{dt} \end{vmatrix} = \left(x_2^{(2)} \frac{dx_1^{(1)}}{dt} - x_2^{(1)} \frac{dx_1^{(2)}}{dt} \right) + \left(x_1^{(1)} \frac{dx_2^{(2)}}{dt} - x_1^{(2)} \frac{dx_2^{(1)}}{dt} \right)$$

(b) Dado que $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ cumplen la ecuación (H), reemplace los vectores en esta ecuación para encontrar $\frac{dx_1^{(1)}}{dt}$, $\frac{dx_1^{(2)}}{dt}$, $\frac{dx_2^{(1)}}{dt}$ y $\frac{dx_2^{(2)}}{dt}$. Reemplace en lo obtenido en el literal anterior para mostrar que

$$\frac{dW}{dt} = (A_{11} + A_{22})(x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_1^{(2)}x_2^{(1)}) = (A_{11} + A_{22})W.$$

(c) Resuelva la ecuación diferencial obtenida en el literal (2b). Concluya el siguiente teorema:

Teorema. Si $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son soluciones del problema homogéneo (H) en el intervalo $\alpha < t < \beta$ entonces en este intervalo $W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}]$ es siempre cero o nunca es cero.

(PÁGINA ADICIONAL)

[Prob. 3] (15 pts) Considere el siguiente problema: Para una matrix cuadrada A se desea resolver la ecuación diferencial

$$(Eul) \quad t^2 \mathbf{x}'' + t\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$$

Esta ecuación se asemeja a la ecuación de Euler $t^n y^{(n)} + t^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + ty' + p(t)y = 0$. El objetivo de este ejercicio es resolver la ecuación (Eul)

- (a) Suponga que la solución es de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{c}t^r$ donde \mathbf{c} es un vector distinto a cero y $r \in \mathbb{C}$. Reescriba el problema usando esta sustitución.
- (b) Muestre que \mathbf{c} es vector propio de la matrix A y que r^2 corresponde a los valores propios de la matrix A .
- (c) Use lo desarrollado en los puntos (3a) y (3b) para resolver el problema (Eul) con la matrix A igual a

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$