Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25

- No se permite el uso de apuntes de clase o libros durante el parcial. Solamente se permite el uso de lápiz, lapicero, borrador, sacapuntas y la hoja de fórmulas en su única versión indicada previamente por el profesor.
- No se permite el uso de aparatos electrónicos. Estos deben permanecer apagados y guardados.
- La duración del parcial es de 110 minutos.
- **Respuesta sin justificación será calificada con cero (0.0).**
- No se admiten hojas extras. Cualquier hoja extra será considerada fraude. En este examen encontrará espacio suficiente para desarrollar los ejercicios.

Nombre:______________________ Código:______________

Problema	P. 1	P. 2	P. 3	Total sobre 50
Nota obtenida				

[Prob. 1] **(15 pts)** Considere el problema

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + G(t),$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G(t) = \begin{bmatrix} e^{-\mathrm{i}t} \\ e^{\mathrm{i}t} \end{bmatrix},$$

donde i es tal que $\mathrm{i}^2 = -1$.

(a) Muestre que los valores propios asociados al problema homogéneo son $\lambda_1 = 1 - \mathrm{i}$ y $\lambda_2 = 1 + \mathrm{i}$.

(b) Muestre que los vectores propios son de la forma

$$a \begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde a y b son escalares distintos a cero.

(c) Encuentre una matriz fundamental $\mathbf{\Psi}(t)$.

(d) Muestre que las columnas de la matriz $\mathbf{\Psi}(t)$ son linealmente independientes.

(e) Encuentre la solución al problema no homogéneo.

Sol.: (a) Los valores propios están dados por:

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ -1 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 + 1 = 0$$

Entonces $(1-r)^2 = -1$, por lo cual $r = 1 \pm \mathrm{i}$.

(b) Reemplazando cada valor de r en la matriz obtenemos
Para $r_1 = 1 - \mathrm{i}$,

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En este caso tenemos que $\mathrm{i}\xi_1 + \xi_2 = 0$, por lo cual $\xi_2 = -\mathrm{i}\xi_1$. Luego

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \xi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

Para $r_1 = 1 + \mathrm{i}$,

$$\begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En este caso tenemos que $-\mathrm{i}\xi_1 + \xi_2 = 0$, por lo cual $\xi_2 = \mathrm{i}\xi_1$. Luego

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \xi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

Note que estos vectores son un múltiplo escalar de los aquí dados (multiplique por i).

(c) Una matriz fundamental sería colocar las soluciones fundamentales como matriz, esto es:

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} e^{(1-\mathrm{i})t} & e^{(1+\mathrm{i})t} \\ -\mathrm{i}e^{(1-\mathrm{i})t} & \mathrm{i}e^{(1+\mathrm{i})t} \end{bmatrix}$$

(d) El determinante de la matriz $\mathbf{\Psi}(t)$ es $|\mathbf{\Psi}(t)| = \mathrm{i}e^{2t} + \mathrm{i}e^{2t} = 2\mathrm{i}e^{2t}$, el cual nunca es cero.

(e) Se puede desarrollar por cualquier método.

1) **Diagonalización.** La matrix T y D en este caso son

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & \mathrm{i}/2 \\ 1/2 & -\mathrm{i}/2 \end{bmatrix}$$

El sistema correspondiente, después de diagonalizar, sería

$$\mathbf{y}' = D\mathbf{y} + T^{-1}G(t)$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 1/2 & \mathrm{i}/2 \\ 1/2 & -\mathrm{i}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\mathrm{i}t} \\ e^{\mathrm{i}t} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (1-\mathrm{i})y_1 + e^{-\mathrm{i}t}/2 + \mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}/2 \\ (1+\mathrm{i})y_2 + e^{-\mathrm{i}t}/2 - \mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvemos cada ecuación. La primera es $y_1' - (1-\mathrm{i})y_1 = e^{-\mathrm{i}t}/2 + \mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}/2$, el factor integrante es $\mu(t) = e^{-(1-\mathrm{i})t}$. La segunda ecuación sería $y_2' - (1+\mathrm{i})y_2 = e^{-\mathrm{i}t}/2 - \mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}/2$, con factor integrante $\mu(t) = e^{-(1+\mathrm{i})t}$. Las soluciones serían

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{(1-\mathrm{i})t} \int e^{-(1-\mathrm{i})t} \left(\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2} + \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{2} \right) \mathrm{d}t \\ &= e^{(1-\mathrm{i})t} \int \left(\frac{e^{-t}}{2} + \mathrm{i}\frac{e^{(-1+2\mathrm{i})t}}{2} \right) \mathrm{d}t \\ &= e^{(1-\mathrm{i})t} \left(-\frac{e^{-t}}{2} + \mathrm{i}\frac{e^{(-1+2\mathrm{i})t}}{2(-1+2\mathrm{i})} + c_1 \right) \\ &= -\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2} - \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{2(1-2\mathrm{i})} + c_1 e^{(1-\mathrm{i})t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{(1+\mathrm{i})t} \int e^{-(1+\mathrm{i})t} \left(\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2} - \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{2} \right) \mathrm{d}t \\ &= e^{(1+\mathrm{i})t} \int \left(\frac{e^{-(1+2\mathrm{i})t}}{2} - \mathrm{i}\frac{e^{-t}}{2} \right) \mathrm{d}t \\ &= e^{(1+\mathrm{i})t} \left(-\frac{e^{-(1+2\mathrm{i})t}}{2(1+2\mathrm{i})} + \mathrm{i}\frac{e^{-t}}{2} + c_2 \right) \\ &= -\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2(1+2\mathrm{i})} + \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{2} + c_2 e^{(1+\mathrm{i})t} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2} - \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{2(1-2\mathrm{i})} + c_1 e^{(1-\mathrm{i})t} \\ -\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2(1+2\mathrm{i})} + \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{2} + c_2 e^{(1+\mathrm{i})t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2} - \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{2(1-2\mathrm{i})} + c_1 e^{(1-\mathrm{i})t} - \frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2(1+2\mathrm{i})} + \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{2} + c_2 e^{(1+\mathrm{i})t} \\ \mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2} - \frac{e^{\mathrm{i}t}}{2(1-2\mathrm{i})} - c_1\mathrm{i}e^{(1-\mathrm{i})t} - \mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2(1+2\mathrm{i})} - \frac{e^{\mathrm{i}t}}{2} + c_2\mathrm{i}e^{(1+\mathrm{i})t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En conclusión, la solución es

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} e^{(1-\mathrm{i})t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} e^{(1+\mathrm{i})t}}_{\text{Homogénea}} + \begin{bmatrix} -\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2} + \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{2(2\mathrm{i}-1)} + \frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2(-1-2\mathrm{i})} + \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{2} \\ \mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2} + \frac{e^{\mathrm{i}t}}{2(2\mathrm{i}-1)} + \mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2(-1-2\mathrm{i})} - \frac{e^{\mathrm{i}t}}{2} \end{bmatrix}$$

2) **Variación de parámetros.** Debemos calcular la matriz inversa de $\mathbf{\Psi}(t)$. Esta matriz es

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi}^{-1}(t) &= \frac{1}{2\mathrm{i}e^{2t}}\begin{bmatrix}\mathrm{i}e^{(1+\mathrm{i})t} & -e^{(1+\mathrm{i})t}\\ \mathrm{i}e^{(1-\mathrm{i})t} & e^{(1-\mathrm{i})t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{e^{(\mathrm{i}-1)t}}{2} & -\frac{e^{(\mathrm{i}-1)t}}{2\mathrm{i}}\\ \frac{e^{(-\mathrm{i}-1)t}}{2} & \frac{e^{(-\mathrm{i}-1)t}}{2\mathrm{i}}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\frac{e^{(\mathrm{i}-1)t}}{2} & \frac{\mathrm{i}e^{(\mathrm{i}-1)t}}{2}\\ \frac{e^{(-\mathrm{i}-1)t}}{2} & -\frac{\mathrm{i}e^{(-\mathrm{i}-1)t}}{2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{\Psi}^{-1}(t)G(t) = \begin{bmatrix}\frac{e^{(\mathrm{i}-1)t}}{2} & \frac{\mathrm{i}e^{(\mathrm{i}-1)t}}{2}\\ \frac{e^{(-\mathrm{i}-1)t}}{2} & -\frac{\mathrm{i}e^{(-\mathrm{i}-1)t}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-\mathrm{i}t}\\ e^{\mathrm{i}t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{e^{-t}}{2} + \frac{\mathrm{i}e^{(2\mathrm{i}-1)t}}{2}\\ \frac{e^{(-1-2\mathrm{i})t}}{2} - \frac{\mathrm{i}e^{-t}}{2}\end{bmatrix}$$

Integramos

$$\int \mathbf{\Psi}^{-1}(t)G(t)\,\mathrm{d}t = \int \begin{bmatrix}\frac{e^{-t}}{2} + \frac{\mathrm{i}e^{(2\mathrm{i}-1)t}}{2}\\ \frac{e^{(-1-2\mathrm{i})t}}{2} - \frac{\mathrm{i}e^{-t}}{2}\end{bmatrix}\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix}\frac{-e^{-t}}{2} + \mathrm{i}\frac{e^{(2\mathrm{i}-1)t}}{2(2\mathrm{i}-1)} + c_1\\ \frac{e^{(-1-2\mathrm{i})t}}{2(-1-2\mathrm{i})} + \frac{\mathrm{i}e^{-t}}{2} + c_2\end{bmatrix}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi}(t)\int \mathbf{\Psi}^{-1}(t)G(t)\,\mathrm{d}t &= \begin{bmatrix}e^{(1-\mathrm{i})t} & e^{(1+\mathrm{i})t}\\ -\mathrm{i}e^{(1-\mathrm{i})t} & \mathrm{i}e^{(1+\mathrm{i})t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-e^{-t}}{2} + \mathrm{i}\frac{e^{(2\mathrm{i}-1)t}}{2(2\mathrm{i}-1)} + c_1\\ \frac{e^{(-1-2\mathrm{i})t}}{2(-1-2\mathrm{i})} + \frac{\mathrm{i}e^{-t}}{2} + c_2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2} + \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{2(2\mathrm{i}-1)} + c_1e^{(1-\mathrm{i})t} + \frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2(-1-2\mathrm{i})} + \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{2} + c_2e^{(1+\mathrm{i})t}\\ \mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2} + \frac{e^{\mathrm{i}t}}{2(2\mathrm{i}-1)} - c_1\mathrm{i}e^{(1-\mathrm{i})t} + \mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2(-1-2\mathrm{i})} - \frac{e^{\mathrm{i}t}}{2} + c_2\mathrm{i}e^{(1+\mathrm{i})t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

En conclusión, la solución es

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{c_1\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{bmatrix}e^{(1-\mathrm{i})t} + c_2\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}e^{(1+\mathrm{i})t}}_{\text{Homogénea}} + \begin{bmatrix}-\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2} + \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{2(2\mathrm{i}-1)} + \frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2(-1-2\mathrm{i})} + \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{2}\\ \mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2} + \frac{e^{\mathrm{i}t}}{2(2\mathrm{i}-1)} + \mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{2(-1-2\mathrm{i})} - \frac{e^{\mathrm{i}t}}{2}\end{bmatrix}$$

[Prob. 2] **(20 pts)** Considere un problema de dos por dos de esta forma

$$\text{(H)} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Suponga que $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son soluciones a esta problema para $\alpha < t < \beta$ y que W es el Wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$.

(a) Muestre que si $\mathbf{x}^{(1)} = \langle\, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\,\rangle$ y $\mathbf{x}^{(2)} = \langle\, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\,\rangle$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x_1^{(1)}}{\mathrm{d}t} & \dfrac{\mathrm{d}x_1^{(2)}}{\mathrm{d}t} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(2)} & x_1^{(2)} \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2^{(1)}}{\mathrm{d}t} & \dfrac{\mathrm{d}x_2^{(2)}}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix} = \left(x_2^{(2)} \frac{\mathrm{d}x_1^{(1)}}{\mathrm{d}t} - x_2^{(1)} \frac{\mathrm{d}x_1^{(2)}}{\mathrm{d}t} \right) + \left(x_1^{(1)} \frac{\mathrm{d}x_2^{(2)}}{\mathrm{d}t} - x_1^{(2)} \frac{\mathrm{d}x_2^{(1)}}{\mathrm{d}t} \right)$$

(b) Dado que $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ cumplen la ecuación (H), reemplace los vectores en esta ecuación para encontrar $\frac{\mathrm{d}x_1^{(1)}}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}x_1^{(2)}}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}x_2^{(1)}}{\mathrm{d}t}$ y $\frac{\mathrm{d}x_2^{(2)}}{\mathrm{d}t}$. Reemplace en lo obtenido en el literal anterior para mostrar que

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = (A_{11} + A_{22})(x_1^{(1)} x_2^{(2)} - x_1^{(2)} x_2^{(1)}) = (A_{11} + A_{22})W.$$

(c) Resuelva la ecuación diferencial obtenida en el literal (2b). Concluya el siguiente teorema:

> **Teorema.** Si $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$ son soluciones del problema homogeneo (H) en el intervalo $\alpha < t < \beta$ entonces en este intervalo $W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}]$ es siempre cero o nunca es cero.

Sol.: Seguimos los pasos acá indicados

(a) Por definición

$$W = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} = x_1^{(1)} x_2^{(2)} - x_2^{(1)} x_1^{(2)}.$$

Entonces la derivada es:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1^{(1)} x_2^{(2)}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_2^{(1)} x_1^{(2)}) \\ &= \left(x_2^{(2)} \frac{\mathrm{d}x_1^{(1)}}{\mathrm{d}t} - x_2^{(1)} \frac{\mathrm{d}x_1^{(2)}}{\mathrm{d}t} \right) + \left(x_1^{(1)} \frac{\mathrm{d}x_2^{(2)}}{\mathrm{d}t} - x_1^{(2)} \frac{\mathrm{d}x_2^{(1)}}{\mathrm{d}t} \right) \end{aligned}$$

(b) Como $\mathbf{x}^{(1)}$ es solución a la ecuación, entonces

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1^{(1)}}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2^{(1)}}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\frac{\mathrm{d}x_1^{(1)}}{\mathrm{d}t} = A_{11} x_1^{(1)} + A_{12} x_2^{(1)}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2^{(1)}}{\mathrm{d}t} = A_{21} x_1^{(1)} + A_{22} x_2^{(1)}$$

De igual forma, para el vector $\mathbf{x}^{(2)}$ tememos

$$\frac{\mathrm{d}x_1^{(2)}}{\mathrm{d}t} = A_{11} x_1^{(2)} + A_{12} x_2^{(2)}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2^{(2)}}{\mathrm{d}t} = A_{21} x_1^{(2)} + A_{22} x_2^{(2)}$$

Reemplazando esto obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= \Big(x_2^{(2)}(A_{11}x_1^{(1)} + A_{12}x_2^{(1)}) - x_2^{(1)}(A_{11}x_1^{(2)} + A_{12}x_2^{(2)})\Big) \\
&\quad + \Big(x_1^{(1)}(A_{21}x_1^{(2)} + A_{22}x_2^{(2)}) - x_1^{(2)}(A_{21}x_1^{(1)} + A_{22}x_2^{(1)})\Big) \\
&= A_{11}(x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_1^{(2)}x_2^{(1)}) + A_{22}(x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_1^{(2)}x_2^{(1)}) = (A_{11} + A_{22})W.
\end{aligned}
$$

(c) Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{W'}{W} &= A_{11} + A_{22} \\
\ln(W) &= (A_{11} + A_{22})t + c \\
W &= Ke^{(A_{11}+A_{22})t}
\end{aligned}
$$

Como el Wronskiano es una función exponencial del tipo ce^x, esta solo puede tomar el valor cero si $c = 0$ lo cual indica que la función es siempre cero, de lo contrario, la función nunca toma el valor de cero.

[Prob. 3] **(15 pts)** Considere el siguiente problema: Para una matrix cuadrada A se desea resolver la ecuación diferencial

$$t^2\mathbf{x}'' + t\mathbf{x}' = A\mathbf{x}. \tag{Eul}$$

Esta ecuación se asemeja a la ecuación de Euler $t^n y^{(n)} + t^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + ty' + p(t)y = 0$. El objetivo de este ejercicio es resolver la ecuación (Eul)

(a) Suponga que la solución es de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{c}t^r$ donde $\mathbf{c}$ es un vector distinto a cero y $r \in \mathbb{C}$. Reescriba el problema usando esta sustitución.

(b) Muestre que $\mathbf{c}$ es vector propio de la matriz A y que r^2 corresponde a los valores propios de la matriz A.

(c) Use lo desarrollado en los puntos (3a) y (3b) para resolver el problema (Eul) con la matrix A igual a

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sol.: (a) Si $\mathbf{x} = \mathbf{c}t^r$ entonces $\mathbf{x}' = \mathbf{c}rt^{r-1}$ y $\mathbf{x}'' = \mathbf{c}r(r-1)t^{r-2}$. Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} t^2\mathbf{x}'' + t\mathbf{x}' &= A\mathbf{x} \\ \mathbf{c}r(r-1)t^r + \mathbf{c}rt^r &= A\mathbf{c}t^r \\ \mathbf{c}r(r-1) + \mathbf{c}r &= A\mathbf{c} \\ \mathbf{c}[r(r-1) + r] &= A\mathbf{c} \\ \mathbf{c}[r^2 - r + r] &= A\mathbf{c} \\ \mathbf{c}r^2 &= A\mathbf{c}. \end{aligned}$$

Si reescribimos $r^2 = \lambda$ entonces

$$\lambda\mathbf{c} = A\mathbf{c}.$$

(b) De la última ecuación que obtuvimos en el item anterior vemos que $\lambda = r^2$ son los valores propios de A y que sus correspondientes vectores propios son $\mathbf{c}$.

(c) Según lo que vimos en los items anteriores, debemos calcular valores y vectores propios. En nuestro caso los valores propios son $\lambda_1 = 9$ y $\lambda_1 = 9$, con vectores propios $\langle 1, 0 \rangle$ y $\langle 1, 5 \rangle$ respectivamente. Dado que $r^2 = \lambda$, tenemos cuatro soluciones: $r_1 = -3$, $r_2 = 3$, $r_3 = -2$, $r_4 = 2$, las dos primeras comparten el mismo vector $\mathbf{c}$, así como las dos últimas.

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t^{-3}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t^{3}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} t^{-2}, \quad \mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} t^{2}.$$

Entonces la solución general a la ecuación es

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t^{-3} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t^{3} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} t^{-2} + c_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} t^{2}.$$