Universidad de los Andes

**Ecuaciones Diferenciales (202210)**

**Parcial 2 - Jueves 17 de Marzo de 2022**

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

---

- No se permite el uso de apuntes de clase o libros durante el parcial. Solamente se permite el uso de lápiz, lapicero, borrador y sacapuntas.
- No se permite el uso de aparatos electrónicos. Estos deben permanecer apagados y guardados.
- La duración del parcial es de 80 minutos.
- **Respuesta sin justificación será calificada con cero (0.0).**
- No se admiten hojas extras. **Cualquier hoja extra será considerada fraude.** En este examen encontrará espacio suficiente para desarrollar los ejercicios.

**Nombre:**
**Código:**

| Problema | P. 1 | P. 2 | P. 3 | P. 4 | P. 5 | Total sobre 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nota obtenida | | | | | | |

[Prob. 1] **(10 Pts)** Resuelva las siguientes situaciones

(a) **(+5 Pts)** Encuentre el Wronskiano de las funciones $y_1(t) = t^3$, $y_2(t) = \sin t$ y usando el Wronskiano determine si las funciones son linealmente independientes o no en el intervalo $I = (0, 1)$.

(b) **(+5 Pts)** Encuentre un intervalo en el cual la ecuación $ty'' + (\sqrt{1-t^2})\, y' + y = 0$, $y(1/2) = 1$ tenga solución única.

[Prob. 2] **(13 Pts)** Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) **(+7 Pts)** $y'' - 2y' + 10y = \cos(3t)$.

(b) **(+6 Pts)** $t^2y'' - 6ty' + 10y = 0, \qquad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$

[Prob. 3] **(10 Pts)** Considere la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$ donde $a$, $b$ y $c$ son constantes positivas. Muestre que si $y_1$ y $y_2$ son soluciones a esta ecuación diferencial entonces $\lim_{t\to\infty}(y_1 - y_2) = 0$.

**Ayuda:** Muestre que las raíces son negativas, o tienen parte real negativa.

[Prob. 4] **(12 Pts)** Suponga que dos números $r_1$ y $r_2$ son raíces distintas de la ecuación $ar^2 + br + c = 0$. En tal caso $y_1 = e^{r_1 t}$ y $y_2 = e^{r_2 t}$ son soluciones a la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$.

(a) **(+5 Pts)** Muestre que la función

$$\phi(t; r_1, r_2) = \frac{e^{r_2 t} - e^{r_1 t}}{r_2 - r_1}$$

también es una solución a la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$.

**Ayuda:** Basta con derivar y reemplazar para comprobar que es solución. Tenga en cuenta que $\mathrm{e}^{r_1 t}$ **es solución** a la ecuación $ay''+by'+cy = 0$. La función $\mathrm{e}^{r_2 t}$ también es solución a la ecuación $ay''+by'+cy = 0$.

(b) **(+7 Pts)** Ahora piense $r_1$ como **una constante fija** y $r_2$ como **una variable**. Si tomamos el límite cuando $r_2$ tiende a $r_1$ nos queda una indeterminación de la forma $0/0$. Use la regla de L'Hopital para mostrar que

$$\lim_{r_2 \to r_1} \phi(t; r_1, r_2) = t\,\mathrm{e}^{r_1 t}\,.$$

**Nota:** Esta es otra forma de mostrar que cuando se tienen raíces repetidas ($r_1 = r_2$), una solución es $\mathrm{e}^{r_1 t}$ y la otra es $t\,\mathrm{e}^{r_1 t}$.

[Prob. 5] **(5 Pts)** Responda Falso o Verdadero (no debe justificar).

- $\boxed{\text{F}}$ o $\boxed{\text{V}}$ Basta con tener una condición inicial para determinar una única función solución en una ecuación de segundo grado.
- $\boxed{\text{F}}$ o $\boxed{\text{V}}$ La ecuación $y'' + (\sin t)y' + t^2 y = 0$ no tiene solución única en el intervalo $(-1, 3)$.
- $\boxed{\text{F}}$ o $\boxed{\text{V}}$ La función $y(t) = \mathrm{e}^{t-t^2/2}$ es solución a la ecuación $y'' + 2ty' + t^2 y = 0$.
- $\boxed{\text{F}}$ o $\boxed{\text{V}}$ Es posible encontrar el Wronskiano de las soluciones de una ecuación sin necesidad de resolverla.
- $\boxed{\text{F}}$ o $\boxed{\text{V}}$ Si $y_1$, $y_2$, $y_3$ son soluciones a una ecuación de segundo grado entonces una de esas funciones es combinación lineal de las otras dos.