

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Ecuaciones Diferenciales (202210)
Parcial 2 (Solución) - Jueves 17 de Marzo de 2022

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

<https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25>

- No se permite el uso de apuntes de clase o libros durante el parcial. Solamente se permite el uso de lápiz, lapicero, borrador y sacapuntas.
- No se permite el uso de aparatos electrónicos. Estos deben permanecer apagados y guardados.
- La duración del parcial es de 80 minutos.
- **Respuesta sin justificación será calificada con cero (0.0).**
- No se admiten hojas extras. **Cualquier hoja extra será considerada fraude.** En este examen encontrará espacio suficiente para desarrollar los ejercicios.

Nombre:

Código:

Problema	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	Total sobre 50
Nota obtenida						

[Prob. 1] **(10 Pts)** Resuelva las siguientes situaciones

- (a) **(+5 Pts)** Encuentre el Wronskiano de las funciones $y_1(t) = t^3$, $y_2(t) = \sin t$ y usando el Wronskiano determine si las funciones son linealmente independientes o no en el intervalo $I = (0, 1)$.

Sol.: El Wronskiano es el determinante

$$W[t^3, \sin t](t) = \begin{vmatrix} t^3 & \sin t \\ 3t^2 & \cos t \end{vmatrix} = t^3 \cos t - 3t^2 \sin t.$$

- (b) **(+5 Pts)** Encuentre un intervalo en el cual la ecuación $ty'' + (\sqrt{1-t^2})y' + y = 0$, $y(1/2) = 1$ tenga solución única.

Sol.: Dividiendo entre t obtenemos $y'' + (\sqrt{1-t^2})/t y' + y/t = 0$. Las funciones $(\sqrt{1-t^2})/t$ y $1/t$ son continuas en $(0, 1)$ y este contiene el punto $t_0 = 1/2$.

[Prob. 2] (12 Pts) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) (+6 Pts) $y'' - 2y' + 10y = \cos(3t)$

Sol.: Resolvemos el problema homogéneo $y'' - 2y' + 10y = 0$. Tomando $y_1(t) = e^{rt}$ obtenemos que $r^2 - 2r + 10 = 0$. Las raíces son

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i.$$

Entonces un conjunto fundamental de soluciones sería $\{e^t \cos(3t), e^t \sin(3t)\}$, la solución al problema homogéneo es $y(t) = C_1 e^t \cos(3t) + C_2 e^t \sin(3t)$. Para la solución particular asuma que la solución se ve de la forma $y_p(t) = A \cos(3t) + B \sin(3t)$. Entonces $y_p'(t) = -3A \sin(3t) + 3B \cos(3t)$, $y_p''(t) = -9A \sin(3t) - 9B \cos(3t)$. Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} -9A \cos(3t) - 9B \sin(3t) - 2(-3A \sin(3t) + 3B \cos(3t)) + 10(A \cos(3t) + B \sin(3t)) &= \cos(3t) \\ -9A \cos(3t) - 9B \sin(3t) + 6A \sin(3t) - 6B \cos(3t) + 10A \cos(3t) + 10B \sin(3t) &= \cos(3t) \\ \cos(3t)(-9A - 6B + 10A) + \sin(3t)(-9B + 6A + 10B) &= \cos(3t) \\ \cos(3t)(A - 6B) + \sin(3t)(B + 6A) &= \cos(3t). \end{aligned}$$

Entonces $A - 6B = 1$ y $B + 6A = 0$. Resolviendo obtenemos $A = 1/37$, $B = -6/37$. La solución particular es $y_p(t) = \frac{1}{37} \cos(3t) - \frac{6}{37} \sin(3t)$. Entonces la solución al problema es

$$y(t) = C_1 e^t \cos(3t) + C_2 e^t \sin(3t) + \frac{1}{37} \cos(3t) - \frac{6}{37} \sin(3t)$$

(b) (+6 Pts) $t^2y'' - 6ty' + 10y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

Sol.: Suponemos $y = t^r$ y obtenemos $y' = rt^{r-1}$, $y'' = r(r-1)t^{r-2}$. Reemplazando

$$r(r-1)t^r - 6rt^r + 10t^r = 0$$

$$r^2 - r - 6r + 10 = 0$$

$$r^2 - 7r + 10 = 0$$

$$(r-5)(r-2) = 0.$$

Entonces las soluciones son $r = 5$, $r = 2$, y la solución al problema es $y(t) = C_1t^5 + C_2t^2$. Usando las condiciones iniciales obtenemos $C_1 + C_2 = 0$, $5C_1 + 2C_2 = 1$. Resolviendo nos da $C_1 = 1/3$, $C_2 = -1/3$. La solución al problema sería

$$y(t) = \frac{1}{3}t^5 - \frac{1}{3}t^2.$$

[Prob. 3] **(11 Pts)** Considere la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$ donde a , b y c son constantes positivas. Muestre que si y_1 y y_2 son soluciones a esta ecuación diferencial entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} (y_1 - y_2) = 0$

Sol.: Las raíces son

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

En esta solución no seremos tan explícitos pues esto ya se discutió en clase. Si las raíces son reales distintas, entonces son negativas, si son reales repetidas el exponente es negativo, si son complejas entonces la parte real es negativa. Y en todos los casos las soluciones van a cero, así que la resta también irá a cero.

[Prob. 4] (12 Pts) Suponga que dos números r_1 y r_2 son raíces distintas de la ecuación $ar^2 + br + c = 0$. En tal caso $y_1 = e^{r_1 t}$ y $y_2 = e^{r_2 t}$ son soluciones a la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$.

(a) (+5 Pts) Muestre que la función

$$\phi(t; r_1, r_2) = \frac{e^{r_2 t} - e^{r_1 t}}{r_2 - r_1}$$

también es una solución a la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$.

Ayuda: Basta con derivar y reemplazar para comprobar que es solución. Tenga en cuenta que $e^{r_1 t}$ es **solución** a la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$, $e^{r_2 t}$ también es solución.

(b) (+7 Pts) Ahora piense r_1 como **una constante fija** y r_2 como **una variable**. Si tomamos el límite cuando r_2 tiende a r_1 nos queda una indeterminación de la forma $0/0$. Use la regla de L'Hopital para mostrar que

$$\lim_{r_2 \rightarrow r_1} \phi(t; r_1, r_2) = t e^{r_1 t}.$$

Nota: Esta es otra forma de mostrar que cuando se tienen raíces repetidas ($r_1 = r_2$), una solución es $e^{r_1 t}$ y la otra es $t e^{r_1 t}$.

Sol.: (a) Derivando obtenemos $\phi' = \frac{r_2 e^{r_2 t} - r_1 e^{r_1 t}}{r_2 - r_1}$ y $\phi'' = \frac{r_2^2 e^{r_2 t} - r_1^2 e^{r_1 t}}{r_2 - r_1}$. Reemplazando

$$\begin{aligned} a \frac{r_2^2 e^{r_2 t} - r_1^2 e^{r_1 t}}{r_2 - r_1} + b \frac{r_2 e^{r_2 t} - r_1 e^{r_1 t}}{r_2 - r_1} + c \frac{e^{r_2 t} - e^{r_1 t}}{r_2 - r_1} &= 0 \\ a(r_2^2 e^{r_2 t} - r_1^2 e^{r_1 t}) + b(r_2 e^{r_2 t} - r_1 e^{r_1 t}) + c(e^{r_2 t} - e^{r_1 t}) &= 0 \\ (ar_2^2 e^{r_2 t} + br_2 e^{r_2 t} + ce^{r_2 t}) + (ar_1^2 e^{r_1 t} + br_1 e^{r_1 t} + ce^{r_1 t}) &= 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces ϕ es una solución a la ecuación.

(b) Aplicamos la regla de L'Hopital para la variable r_2 . Entonces derivamos numerador y denominador con respecto a r_1 .

$$\lim_{r_2 \rightarrow r_1} \phi(t; r_1, r_2) = \lim_{r_2 \rightarrow r_1} \frac{e^{r_2 t} - e^{r_1 t}}{r_2 - r_1} = \lim_{r_2 \rightarrow r_1} \frac{te^{r_2 t}}{1} = t e^{r_1 t}.$$

[Prob. 5] (5 Pts) Responda Falso o Verdadero (no debe justificar).

- F o V Basta con tener una condición inicial para determinar una única función solución en una ecuación de segundo grado.
- F o V La ecuación $y'' + (\sin t)y' + t^2y = 0$ no tiene solución única en el intervalo $(-1, 3)$.
- F o V La función $y(t) = e^{t-t^2/2}$ es solución a la ecuación $y'' + 2ty' + t^2y = 0$.
- F o V Es posible encontrar el Wronskiano de las soluciones de una ecuación sin necesidad de resolverla.
- F o V Si y_1, y_2, y_3 son soluciones a una ecuación de segundo grado entonces una de esas funciones es combinación lineal de las otras dos.