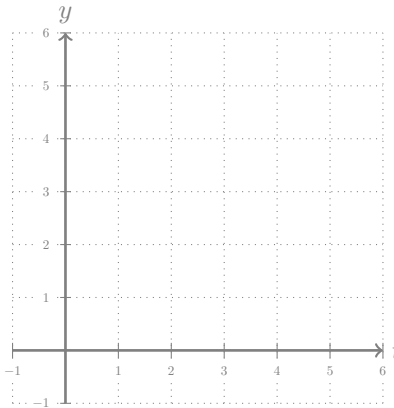


UNIVERSIDAD DE LOS ANDES - Ecuaciones Diferenciales (202610)  
**Parcial 1 (Solución) - Lunes 23 de febrero de 2026**

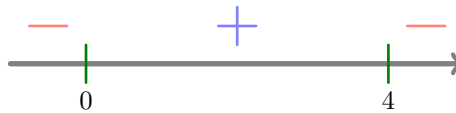
No se permite el uso de apuntes de clase o libros durante el parcial. Solamente se permite el uso de lápiz, lapicero, borrador y sacapuntas. No se permite el uso de aparatos electrónicos. Estos deben permanecer apagados y guardados. La duración del parcial es de 75 minutos. Respuesta sin justificación será calificada con cero (0.0). No se admiten hojas extras. **Cualquier hoja extra será considerada fraude.** En este examen encontrará espacio suficiente para desarrollar los ejercicios.

Problema	P. 1	P. 3	P. 2	P. 4	Total sobre 44
Nota obtenida					

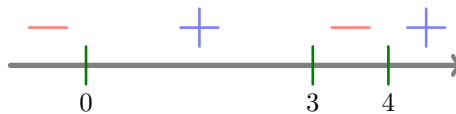
[Prob. 1] (9 Pts) Realice un plano de fase de la ecuación diferencial  $y' = (4 - y)y^3$ .



Sol.: los puntos críticos son las soluciones a la ecuación  $(4 - y)y^3 = 0$ , es decir  $y = 0$  e  $y = 4$ . El signo de la derivada es



Para la segunda derivada, recordemos que  $y'' = f(y)f'(y) = 4(4 - y)y^5(3 - y)$ . El punto de inflexión es  $y = 3$ . Los signos son



Con esta información podemos hacer un plano de fase de la ecuación.

[Prob. 2] (12 Pts) Resuelva las siguientes ecuaciones.

- (a) (+3 Pts)  $(1 + t^2)y' + 4ty' = (1 + t^2)^{-2}$ . Este ejercicio se puede resolver, pero lastimosamente no era el ejercicio que pensaba escribir. Aún así es soluble.
- (b) (+3 Pts)  $y'' + 14y' + 49y = 0$ .
- (c) (+3 Pts)  $y'' + 6y' + 13y = 0$ , donde  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -2$ .
- (d) (+3 Pts)  $t^2y'' + 3ty' - 4y = 0$ , donde  $t > 0$ .

Sol.: (a) Dividimos por  $1 + t^2$ , nos queda

$$y' + \frac{4t}{1+t^2}y' = (1+t^2)^{-3}.$$

Entonces  $p(t) = 4t/(1+t^2)$  y  $q(t) = (1+t^2)^{-3}$ . El factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\int \frac{4t}{1+t^2} dt} = e^{2 \log(1+t^2)} = (1+t^2)^2.$$

La solución es

$$\begin{aligned} y(t) &= (1+t^2)^{-2} \int \frac{1}{1+t^2} dt = (1+t^2)^{-2} (C + \arctan(t)) \\ &= \frac{C}{(1+t^2)^2} + \frac{\arctan(t)}{(1+t^2)^2} \end{aligned}$$

(b) La ecuación característica es  $r^2 + 14r + 49 = 0$ , el cual es igual a  $(r+7)^2 = 0$ . Tenemos una sola raíz,  $r = -7$ . La solución general es

$$y(t) = C_1 e^{-7t} + C_2 t e^{-7t}.$$

(c) La ecuación característica es  $r^2 + 6r + 13 = 0$ . Las soluciones son

$$r = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(13)}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i.$$

La solución general es

$$y(t) = C_1 e^{-3t} \cos(2t) + C_2 e^{-3t} \sin(2t).$$

Como  $y(0) = 0$  entonces  $0 = C_1$ , luego  $y(t) = C_2 e^{-3t} \sin(2t)$ . La derivada es  $y'(t) = -3C_2 e^{-3t} \sin(2t) + 2C_2 e^{-3t} \cos(2t)$ . Usando que  $y'(0) = -2$  entonces

$$-2 = 2C_2.$$

Luego  $C_2 = -1$  y la solución es

$$y(t) = -e^{-3t} \sin(2t).$$

(d) Hacemos  $y = t^r$ , entonces la ecuación se transforma en  $r(r-1)t^r + 3rt^r - 4t^r = 0$ . Entonces  $r^2 + 2r - 4 = 0$ , cuyas soluciones son

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-4)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}.$$

La solución general es

$$y(t) = C_1 t^{-1+\sqrt{5}} + C_2 t^{-1-\sqrt{5}}.$$

[Prob. 3] (**11 Pts**) Considere la ecuación diferencial

$$(t-1)y'' - ty' + y = 0, \quad t > 0.$$

(a) (**+3 Pts**) Muestre que la función  $y_1(t) = e^t$  es una solución a la ecuación diferencial.

(b) (**+8 Pts**) Encuentre otra solución  $y_2(t)$  a la ecuación diferencial que sea linealmente independiente de  $y_1(t)$  usando el método de reducción de orden.

Sol.: (a) Note que  $y_1' = y_1'' = e^t$ . Reemplazando

$$(t-1)e^t - te^t + e^t = te^t - e^t - te^t + e^t = 0.$$

Entonces es una solución a la ecuación.

(b) Suponga que  $y(t) = u(t)e^t$  es una solución a la ecuación. Derivando obtenemos  $y' = ue^t + u'e^t$ . La segunda derivada es

$$y'' = u''e^t + 2u'e^t + ue^t.$$

Reemplazando en la ecuación inicial:

$$(t-1)(u''e^t + 2u'e^t + ue^t) - t(u'e^t + ue^t) + ue^t = 0$$

$$tu'' + 2tu' + tu - u'' - 2u' - u - tu' - tu + u = 0$$

$$tu'' + tu' - u'' - 2u' = 0.$$

Hacemos  $v = u'$ , entonces

$$(t-1)v' + (t-2)v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{t-2}{t-1} dt = -\left(\frac{t-1-1}{t-1}\right) dt$$

$$\log(v(t)) = -t + \log(t-1) + C$$

$$v(t) = C_1(t-1)e^{-t}.$$

La función  $u(t)$  es la integral de  $v(t)$  el cual resulta en

$$u(t) = C_1 t e^{-t} + C_2.$$

Reemplazando en  $y(t)$

$$y(t) = (C_1 t e^{-t} + C_2) e^t = C_1 t + C_2 e^t,$$

que corresponde a la solución general, la segunda solución es  $y_2(t) = t$ .

[Prob. 4] (12 Pts) Resuelva los siguientes problemas.

(a) (+6 Pts) (Teorema de Abel) Muestre que si  $y_1$  y  $y_2$  son dos soluciones a la ecuación

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

donde  $p$  y  $q$  son funciones continuas, entonces el Wronskiano  $W(t)$  cumple

$$W(t) = C e^{-\int p(t) dt}$$

donde  $C$  es una constante.

(b) (+6 Pts) Suponga que  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$ty'' + 2y' + t e^t y = 0,$$

definida para  $t > 0$ . Suponga que el Wronskiano entre las funciones  $y_1$  y  $y_2$  cumple  $W(1) = 2$ . Encuentre el valor de  $W(3)$ .

Sol.: (a) como ambas funciones son solución entonces

$$\begin{cases} y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0, \\ y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 = 0. \end{cases}$$

Multiplicamos la primera por  $y_2$  y la segunda ecuación por  $y_1$ :

$$\begin{cases} y_2 y_1'' + p(t)y_2 y_1' + q(t)y_2 y_1 = 0, \\ y_1 y_2'' + p(t)y_1 y_2' + q(t)y_1 y_2 = 0. \end{cases}$$

Al restar llegamos a

$$y_2 y_1'' - y_1 y_2'' + p(t)(y_2 y_1' - y_1 y_2') = 0.$$

Note que  $y_2 y_1'' - y_1 y_2'' = -W'(t)$ , entonces

$$-W'(t) - p(t)W(t) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación diferencial nos queda

$$W(t) = C e^{-\int p(t) dt}.$$

(b) note la ecuación es igual a

$$y'' + \frac{2}{t}y' + e^t y = 0.$$

Por el teorema de Abel  $W(t) = C e^{-\int p(t) dt}$  donde  $C$  es una constante. En nuestro caso  $p(t) = 2/t$ , luego

$$W(t) = C e^{-\int \frac{2}{t} dt} = C e^{-2 \ln t} = C t^{-2}.$$

Para determinar la constante, note que  $W(1) = 2$ , luego  $2 = C \cdot 1^{-2}$ . Entonces  $C = 2$  y  $W(t) = 2/t^2$ . Finalmente  $W(3) = 2/9$ .