Universidad de los Andes
Ecuaciones Diferenciales (202210)
Parcial 1 (Solución) - Miércoles 16 de Febrero de 2022

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25

- No se permite el uso de apuntes de clase o libros durante el parcial. Solamente se permite el uso de lápiz, lapicero, borrador y sacapuntas.
- No se permite el uso de aparatos electrónicos. Estos deben permanecer apagados y guardados.
- La duración del parcial es de 80 minutos.
- **Respuesta sin justificación será calificada con cero (0.0).**
- No se admiten hojas extras. **Cualquier hoja extra será considerada fraude.** En este examen encontrará espacio suficiente para desarrollar los ejercicios.

Nombre:
Código:

Problema	P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	P. 5	Total sobre 50
Nota obtenida						

[Prob. 1] **(10 Pt)** Encuentre un intervalo o rectángulo en el cual las ecuaciones tengan solución única. No debe resolverla.

(a) $(\sqrt{t-1})y' + (\ln(t^2-1))y = t, \quad y(3) = 3.$

Sol.: Pasando $\sqrt{t-1}$ a restar obtenemos

$$y' + \frac{\ln(t^2-1)}{\sqrt{t-1}}y = \frac{t}{\sqrt{t-1}}.$$

Necesitamos encontrar un intervalo en el que las funciones

$$p(t) = \frac{\ln(t^2-1)}{\sqrt{t-1}}, \quad q(t) = \frac{t}{\sqrt{t-1}},$$

sean continuas. Para que $p(t)$ sea continua basta con hacer $t > 1$, al igual que para $q(t)$. Entonces tomando el intervalo $(1, 4)$ (por ejemplo) tenemos que p y q son continuas, entonces existe la solución y es única.

(b) $y' = \dfrac{ty}{\sqrt{t^2-y^2}}, \quad y(1) = 0.$

Sol.: Debemos hacer la función $f(t, y) = \frac{ty}{\sqrt{t^2-y^2}}$ continua así como su derivada parcial $\partial f/\partial y = \frac{t^3}{(t^2-y^2)^{3/2}}$ continuas en un rectángulo $t \times y$. Estas funciones son continuas para todo (t, y) tal que $t \neq y$ y $t^2 > y^2$. Haciendo una gráfica de esta región se puede encontrar el rectángulo en cuestión.

[Prob. 2] **(10 Pt)** Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $e^x(x+1)\,dx + (y\,e^y - x\,e^x)\,dy = 0$

Sol.: En este caso parece ser una exacta, verifiquemos. Tomemos $P(x,y) = e^x(x+1)$ y $Q(x,y) = (y\,e^y - x\,e^x)$, entonces $P_y = 0$ y $Q_x = -e^x - x\,e^x$. La ecuación no es exacta, pero se puede volver exacta tomando el factor integrante.

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{-e^x - x\,e^x - 0}{e^x(x+1)} = \frac{-e^x(1+x)}{e^x(x+1)} = -1$$

Entonces hay un factor integrante que depende solo de y,

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\,dy.$$

El factor integrante sería $\mu(x) = e^{-y}$. Multiplicando la ecuación por este factor obtenemos

$$e^{x-y}(x+1)\,dx + (y - x\,e^{x-y})\,dy = 0.$$

Ahora $P(x,y) = e^{x-y}(x+1)$ y $Q(x,y) = y - x\,e^{x-y}$, derivando obtenemos

$$P_y = -e^{x-y}(x+1), \quad Q_x = -e^{x-y} - x\,e^{x-y} = -e^{x-y}(x+1).$$

La nueva ecuación es exacta. Suponga que $f(x,y)$ es una función tal que $\partial f/\partial x = P$ y $\partial f/\partial y = Q$. Es decir

$$\begin{cases} \partial f/\partial x = e^{x-y}(x+1) \\ \partial f/\partial y = y - x\,e^{x-y}\,. \end{cases}$$

A partir de la segunda ecuación obtenemos al integrar

$$f(x,y) = \frac{y^2}{2} + x\,e^{x-y} + h(x).$$

Derivando con respecto a x e igualando da P.

$$e^{x-y} + x\,e^{x-y} + h'(x) = e^{x-y}(x+1).$$

Entonces $h'(x) = 0$ y $h(x) = K$ y obtenemos que $f(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + x\,e^{x-y} + K$. La solución al problema es $\dfrac{y^2}{2} + x\,e^{x-y} = C$.

(b) $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x}, \quad y(-1) = 1.$

Sol.: Es una ecuación de Bernoulli, aunque también es separable. Pasemos y^2 a dividir

$$\frac{y'}{y^2} + \left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{y} = \frac{1}{x}.$$

Tomamos $u = 1/y$ entonces $u' = -y'/y^2$, reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} -u' + u/x &= 1/x \\ u' - u/x &= -1/x \end{aligned}$$

Usamos factor integrante $\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int 1/x \,\mathrm{d}x} = 1/x$. Entonces la solució para u es

$$u(x) = x \int (-1)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = x\left(\frac{1}{x} + C\right) = 1 + xC.$$

En conclusión

$$y = \frac{1}{1 + xC}.$$

Como $y(-1) = 1$ entonces $1 = 1/(1 - C)$ del cual conluímos $C = 0$, y la función toma la forma $y = 1$.

[Prob. 3] **(10 Pt)** Un tanque contiene una solución salina de 40 lt con una concentración de alcohol de 5 oz/lt. Al tanque se le agrega agua a una velocidad de 2 lt/min, esta agua que está entrando tiene una concentración de alcohol de 2 oz/lt. Por un tubo de escape sale la solución perfectamente mezclada a una velocidad de 2 lt/min. Encuentre el tiempo necesario para que la concentración de alcohol pase de 5 oz/lt a 4 on/lt. Puede dejar la expresión final del tiempo, después de despejar t, indicada.

Sol.: Si llamamos $s(t)$ a la cantidad de alcohol en un momento t entonces la velocidad a la que cambia $s(t)$ es

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 2 \cdot 2 - 2\left(\frac{s}{40}\right)$$

Entonces debemos resolver la ecuación $s' = 4 - s/20$, es decir $s' + s/20 = 4$. Esta ecuación se resuelve usando factor integrante, dando como resultado $s(t) = C\,\mathrm{e}^{-t/20} + 80$. La cantidad inicial de sal es de 200 oz entonces cuando $t = 0$ nos da $200 = C + 80$, y entonces la función sería

$$s(t) = 120\,\mathrm{e}^{-t/20} + 80.$$

Si deseamos que la concentración de sal sea de 4 oz/lt, necesitamos que haya 160 oz de sal. Es decir $160 = 120\,\mathrm{e}^{-t/20} + 80$, despejando obtenemos $t = 20\ln\left(\frac{2}{3}\right) = -20\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

[Prob. 4] **(15 Pt)** A continuación vamos a resolver la interesante ecuación de Riccati,

Una ecuación diferencial de la forma

$$y' = p(t)y^2 + q(t)y + r(t)$$

se llama **Ecuación de Riccati**.

(a) Suponga que $s(t)$ **es una solución** a la ecuación, muestre que si realizamos la sustitución

$$y(t) = s(t) + \frac{1}{u(t)}, \quad y'(t) = s'(t) - \frac{1}{u^2(t)}u'(t),$$

donde $u(t)$ es una función desconocida, entonces la ecuación de Riccati se transforma en lo siguiente

$$u' + (q(t) + 2p(t)s(t))\, u = -p(t). \tag{Aux}$$

Con esta ecuación podemos encontrar la función $u(t)$ y al reemplazarla en $y(t)$ obtenemos la **solución general**.

(b) Ahora vamos a resolver la ecuación $y' = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{y}{t} - y^2$. Muestre que la función $s(t) = 1/t$ es una solución a esta ecuación.

(c) Plantee la ecuación (Aux) y resuelvala para encontrar la función $u(t)$.

(d) Escriba la solución general $y(t)$.

Sol.: (a) Reemplazando cada expresión en la ecuación de Riccati obtenemos

$$\begin{aligned}
s'(t) - \frac{1}{u^2(t)}u'(t) &= p(t)\left(s(t) + \frac{1}{u(t)}\right)^2 + q(t)\left(s(t) + \frac{1}{u(t)}\right) + r(t)\\
s'(t) - \frac{1}{u^2(t)}u'(t) &= p(t)s^2(t) + 2p(t)\frac{s(t)}{u(t)} + \frac{p(t)}{u^2(t)} + q(t)s(t) + \frac{q(t)}{u(t)} + r(t)
\end{aligned}$$

Como $s(t)$ es solución, entonces $s'(t) = p(t)s^2(t) + q(t)s(t) + r(t)$, es decir:

$$\begin{aligned}
\cancel{s'(t)} - \frac{1}{u^2(t)}u'(t) &= \cancel{p(t)s^2(t)} + 2p(t)\frac{s(t)}{u(t)} + \frac{p(t)}{u^2(t)} + \cancel{q(t)s(t)} + \frac{q(t)}{u(t)} + \cancel{r(t)}\\
-\frac{1}{u^2(t)}u'(t) &= 2p(t)\frac{s(t)}{u(t)} + \frac{p(t)}{u^2(t)} + \frac{q(t)}{u(t)}\\
-u'(t) &= 2p(t)s(t)u(t) + p(t) + q(t)u(t)\\
-u'(t) - q(t)u(t) - 2p(t)s(t)u(t) &= p(t)\\
u'(s) + (q(t) + 2p(t)s(t))u(t) &= -p(t)
\end{aligned}$$

(b) Si $s(t) = 1/t$ entonces $s'(t) = -1/t^2$. Reemplazando

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{t^2} &= \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}\\
-\frac{1}{t^2} &= -\frac{1}{t^2}
\end{aligned}$$

Entonces sí resuelve la ecuación.

(c) La ecuación auxiliar queda de la forma

$$u' + \left(-\frac{1}{t} - \frac{2}{t}\right)u = 1$$

Debemos resolver la ecuación $u' - 3u/t = 1$, usando factor integrante nos da $u(t) = Ct^3 - t/2$.

(d) La solución general es

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{Ct^3 - \frac{t}{2}}.$$

[Prob. 5] **(5 Pt)** Responda Falso o Verdadero (no debe justificar).

- $\boxed{\text{F}}$ Toda ecuación diferencial tiene solución.
- $\boxed{\text{V}}$ La ecuación de Bernoulli se puede reducir a una lineal de primer orden.
- $\boxed{\text{V}}$ La ecuación $y' = \dfrac{1}{x^2+1}$ tiene solución única para toda condición inicial $y(t_0) = y_0$.
- $\boxed{\text{F}}$ Si $y(t)$ es solución a la ecuación $y' + y = 1$ entonces $Ky(t)$ es solución para toda constante K.
- $\boxed{\text{V}}$ Hoy es miércoles.