UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Ecuaciones Diferenciales (201919)

Parcial 1 (Solución) - Martes 11 de Junio de 2019

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25

- No se permite el uso de apuntes de clase o libros durante el parcial. Solamente se permite el uso de lápiz, lapicero, borrador, sacapuntas y la hoja de fórmulas en su única versión indicada previamente por el profesor.
- No se permite el uso de aparatos electrónicos. Estos deben permanecer apagados y guardados.
- La duración del parcial es de 110 minutos.
- **Respuesta sin justificación será calificada con cero (0.0).**
- No se admiten hojas extras. Cualquier hoja extra será considerada fraude. En este examen encontrará espacio suficiente para desarrollar los ejercicios.

Nombre:____________________ Código:__________

Problema	P. 2	P. 1	P. 3	P. 4	Total sobre 50
Nota obtenida					

[Prob. 1] **(10 Pt)** Dibuje la región en el plano ty en la cual la ecuación diferencial tiene solución única

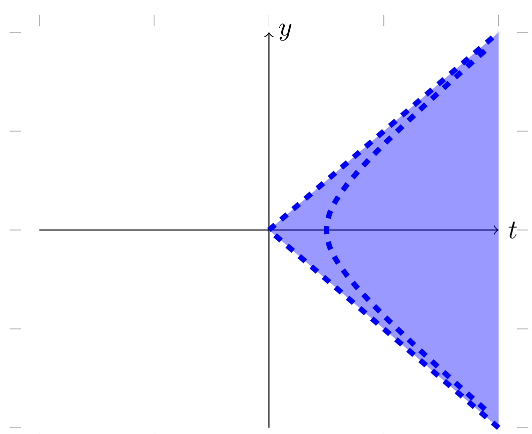
$$y' = \frac{\ln(t-y)}{\ln(t^2-y^2)}.$$

Debe enunciar claramente las condiciones que se deben cumplir para que en esta región exista la solución.

Sol.: Para que exista la solución la función $f(t,y) = \frac{\ln(t-y)}{\ln(t^2-y^2)}$ y su derivada $\partial f/\partial y$ deben ser continuas. La derivada es

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\frac{\ln(t^t-y^2)}{t-y} + \frac{2y\ln(t^2-y^2)}{t^2-y^2}}{(\ln(t^2-y^2))^2}.$$

De acá vemos que $t-y>0$, $t^2-y^2 \neq 1$ y que $t^2-y^2>0$. Entonces la región es



[Prob. 2] **(20 Pt)** Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales o problema de valor inicial.

(a) $y^2(1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}y = \arcsin x\,\mathrm{d}x, \quad y(1) = 1.$

Sol.: Esta ecuación es separable

$$\begin{aligned} y^2\,\mathrm{d}y &= \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ \frac{y^3}{3} &= \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ \frac{y^3}{3} &= \int u\,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

donde $u = \arcsin x$.

$$\begin{aligned} \frac{y^3}{3} &= \frac{u^2}{2} + C, \\ \frac{y^3}{3} &= \frac{(\arcsin x)^2}{2} + C \end{aligned}$$

Reemplazando la condición inicial obtenemos $C = 1/3 - \pi^2/8$, entonces

$$\frac{y^3}{3} = \frac{(\arcsin x)^2}{2} + 1/3 - \pi^2/8$$

(b) $ty' + (t+1)y = t.$

Sol.:

$$y' + \left(1 + \frac{1}{t}\right) y = 1$$

El factor integrante es $\mu(t) = te^t$, pues

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int(1+1/t)\,\mathrm{d}t} = e^{t+\ln t} \\ &= te^t. \end{aligned}$$

La solución sería

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{te^t}\int te^t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{te^t}\left(te^t - e^t + C)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{t} + \frac{C}{te^t} \end{aligned}$$

(c) $y' = -\dfrac{ay+b}{cy+d}$.

Sol.: Es una ecuación separable

$$\begin{aligned}
\frac{cy+d}{ay+b}\,\mathrm{d}y &= -\,\mathrm{d}x \\
\left(\frac{c}{a}\frac{y}{y+b/a} + \frac{d}{ay+b}\right)\mathrm{d}y &= -\,\mathrm{d}x \\
\frac{c}{a}\int\left(1 - \frac{b/a}{y+b/a}\right)\mathrm{d}y + \frac{d}{a}\ln(ay+b) &= -x + C \\
\frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{a}\ln\left(y+\frac{b}{a}\right)\right) + \frac{d}{a}\ln(ay+b) &= -x + C.
\end{aligned}$$

(d) $\dfrac{x^2-3y^2}{2xy} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Sol.: Tomamos $y = ux$, donde u es una función que depende de x. Obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-3u^2x^2}{2x^2u} &= u'x + u \\
\frac{1-3u^2}{2u} &= u'x + u \\
\frac{1-3u^2}{2u} - u &= u'x \\
\frac{1-3u^2-2u^2}{2u} &= u'x \\
\frac{\mathrm{d}x}{x} &= \frac{2u}{1-5u^2}\,\mathrm{d}u \\
\ln x &= -\frac{1}{5}\ln(1-5v) + C,
\end{aligned}$$

donde $v = u^2$.

$$\begin{aligned}
x &= K(1-5v)^{-1/5} \\
x &= K(1-5u^2)^{-1/5} \\
x &= K\left(1 - \frac{5y^2}{x^2}\right)^{-1/5}.
\end{aligned}$$

[Prob. 3] **(10 Pt)** Resuelva el siguiente problema:

(a) Muestre que la ecuación siguiente ecuación diferencial no es exacta:

$$\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x}\sin x\right)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right)\,\mathrm{d}y = 0$$

Sol.: Encontramos las derivadas parciales y comparamos

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sin y}{y} - 2e^{-x}\sin x, & N &= \frac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y} \\ M_y &= \frac{y\cos y - \sin y}{y^2}, & N_x &= \frac{-2e^{-x}\cos x - 2e^{-x}\sin x}{y}. \end{aligned}$$

Claramente estas expresiones son distintas

(b) Muestre que al multiplicar por el factor $\mu(x,y) = ye^x$ la ecuación anterior se vuelve una ecuación exacta y resuelva la ecuación.

Sol.: Multiplicando por $\mu(x,y) = ye^x$ obtenemos la ecuación

$$(e^x\sin y - 2y\sin x)\,\mathrm{d}x + (e^x\cos y + 2\cos x)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} M &= e^x\sin y - 2y\sin x, & N &= e^x\cos y + 2\cos x \\ M_y &= e^x\cos y - 2\sin x, & N_x &= e^x\cos y - 2\sin x. \end{aligned}$$

Esto muestra que al multiplicar por la función μ sí obtenemos una ecuación exacta. Sabemos que existe ϕ tal que $\phi_x = M$ y $\phi_y = N$. Luego,

$$\begin{aligned} \phi_x &= e^x\sin y - 2y\sin x \\ \phi &= e^x\sin y + 2y\cos x + h(y) \end{aligned}$$

Derivando con respecto a y e igualando a N obtenemos

$$\begin{aligned} e^x\cos y + 2\cos x + h'(y) = \phi_y &= e^x\cos y + 2\cos x \\ h'(y) &= 0 \\ h(y) &= C \end{aligned}$$

En conclusión, $\phi(x,y) = e^x\sin y + 2y\cos x + C$ y la solución a la ecuación diferencial es

$$e^x\sin y + 2y\cos x = C.$$

[Prob. 4] **(10 Pt)**Considere la ecuación diferencial

$$y' + p(t)y = g(t)$$

(a) Asuma que $g(t) = 0$ para todo t y muestre que la solución en este caso es

$$y(t) = C \exp\left[-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right],$$

donde C es una constante y exp es la función exponencial: $\exp(t) = e^t$.

Sol.: Si $g(t) = 0$ la ecuación toma la forma $y' + p(t)y = 0$, entonces $\frac{y'}{y} = -p(t)$. Integrando obtenemos

$$\ln y(t) = -\int p(t)\,\mathrm{d}t + c$$
$$y(t) = C \exp\left[-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

(b) Ahora pasemos al caso en que no necesariamente $g(t) \neq 0$ para todo t. Suponga que la solución a la ecuación es de la forma

$$y(t) = u(t) \exp\left[-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right],$$

donde $u(t)$ es una función que depende de t. Muestre que $u(t)$ debe cumplir la siguiente ecuación diferencial

$$u'(t) = g(t) \exp\left[\int p(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

Sol.: Derivamos y reemplazamos usando regla del producto

$$y'(t) = u'(t) \exp\left[\int p(t)\,\mathrm{d}t\right] - u(t)p(t) \exp\left[\int p(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

Al reemplazar en la ecuación obtenemos

$$\underbrace{u'(t) \exp\left[-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right] \overbrace{- p(t)u(t) \exp\left[-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right]}}_{y'(t)} \overbrace{+p(t)\, \underbrace{u(t) \exp\left[-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right]}_{y(t)}}^{=0} = g(t)$$
$$u'(t) \exp\left[-\int p(t)\,\mathrm{d}t\right] = g(t)$$

Entonces

$$u'(t) = g(t) \exp\left[\int p(t)\,\mathrm{d}t\right].$$