

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Ecuaciones diferenciales (202610)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

<https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/>

6.4 Ecuaciones con funciones discontinuas

Nota: todos los logaritmos son naturales.

(1) Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $y'' + 4y = \sin t + u_\pi(t) \sin(t - \pi)$, donde $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,

Rta.: $y(t) = \frac{2 \sin t - \sin(2t)}{6} - \frac{u_\pi(t)(2 \sin t + \sin(2t))}{6}$

(b) $y'' + 3y' + 2y = u_2(t)$, donde $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,

Rta.: $y(t) = e^{-t} - e^{-2t} + u_2(t) \left(\frac{1}{2} - e^{-t-2} + \frac{1}{2} e^{-2t-4} \right)$

(c) $y^{iv} + 5y'' + 4y = 1 - u_\pi(t)$, donde $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$,

Rta.: $y(t) = u_1(t)(-1 + (\cos(t-1) + \cosh(t-1))/2) - u_2(t)(-1 + (\cos(t-2) + \cosh(t-2))/2)$

(d) $y'' + y = g(t)$, donde $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ y la función g es

$$g(t) = \begin{cases} t/2, & \text{si } 0 \leq t < 6, \\ 3, & \text{si } t \geq 6. \end{cases}$$

Rta.: $y(t) = \frac{\sin t}{2} + t/2 - \frac{u_6(t)}{2}(t - 6 - \sin(t - 6))$

(e) $y'' + y' + 5y/4 = g(t)$, donde $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ y la función g es

$$g(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t < \pi/2, \\ \pi/2, & \text{si } t \geq \pi/2. \end{cases}$$

(2) Considere la ecuación diferencial $y'' + y = f(t)$, con las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$, donde

$$f(t) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k u_k(t)}{k}.$$

(a) Muestre que para todo $t \in \mathbb{R}$ la función $f(t)$ está definida. Es decir, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(b) Realice un bosquejo de la gráfica de la función $f(t)$ solo para $t \in [-1, 5]$.

Rta.: [gráfica 6.4.2](#)

(c) Suponga que la transformada de Laplace de esta función se puede calcular término a término. Encuentre la transformada de Laplace de $f(t)$.

(d) Suponga que la transformada inversa de Laplace se calcula término a término. Encuentre la solución al problema de valor inicial.

(e) Realice un bosquejo de la gráfica de la solución $y(t)$ para $t \in [-1, 5]$.

Rta.: [gráfica 6.4.2.2](#)