UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Ecuaciones diferenciales (202610)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

6.3 Función de paso

Nota: todos los logaritmos son naturales.

(1) Realice una gráfica para cada una de las siguientes funciones.

(a) $y(t) = u_1(t) - 2u_2(t) + 3u_3(t)$,

(b) $y(t) = (t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$,

(c) $y(t) = \sin(t)u_{\pi/2}(t)$,

(d) $y(t) = \sin(t-\pi)u_\pi(t) + t(1-u_\pi(t))$,

(2) Reescriba cada una de las siguientes funciones usando funciones de paso.

(a) $y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 2, \\ (t-2)^2, & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$,

(b) $h(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < \pi, \\ t-\pi, & \text{si } \pi \leq t < 2\pi,, \\ 0, & \text{si } t \geq 2\pi. \end{cases}$

(c) $u(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t < 1, \\ 1, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$,

(3) Encuentre la transformada de Laplace de cada una de las funciones del ítem (2)

(4) Encuentre la transformada inversa de Laplace para cada función $F(s)$.

(a) $F(s) = \dfrac{6}{(s-2)^4}$, **Rta.:** $y(t) = \mathrm{e}^{2t}\, t^3$

(b) $F(s) = \dfrac{2(s-1)\,\mathrm{e}^{-2s}}{s^2-2s+2}$, **Rta.:** $y(t) = 2\,\mathrm{e}^{t-2}\, u_2(t)\cos(t-2)$

(c) $F(s) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{-2s}}{s^2-4}$, **Rta.:** $y(t) = u_2(t)\sinh(2t-4)$

(d) $F(s) = \dfrac{\mathrm{e}^{-s} + \mathrm{e}^{-2s} - \mathrm{e}^{-3s} - \mathrm{e}^{-4s}}{s}$, **Rta.:** $y(t) = u_1(t) + u_2(t) - u_3(t) - u_4(t)$

(5) Sea $f(t)$ una función cuya transformada de Laplace existe para $s > a \geq 0$. Muestre las siguientes fórmulas:

(a) para $k > 0$

$$\mathcal{L}\{f(kt)\} = \frac{1}{k}\mathcal{L}\left\{\frac{s}{k}\right\}$$

definida para $s > ka$,

(b) para $k > 0$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right).$$

Usando estas fórmulas se puede calcular algunas transformadas inversas de forma sencilla.

(c) Encuentre $f(t)$ donde

$$F(s) = \frac{n!}{(s/2)^{n+1}}.$$

Rta.: $f(t) = 2^{n+1} t^n$

(6) Suponga que f es una función periódica con periodo T, es decir $f(t+T) = f(t)$ para todo $t > 0$. Muestre que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-sT}} \int_0^T \mathrm{e}^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t.$$