

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Ecuaciones diferenciales (202610)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

<https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/>

6.2 Resolviendo ecuaciones usando Laplace

Nota: todos los logaritmos son naturales.

- (1) Encuentre la inversa de la transformada de Laplace para cada una de las siguientes funciones.

(a) $F(s) = \frac{3}{s^2 + 16}$, Rta.: $y(t) = 3 \sin(4t)/4$

(b) $F(s) = \frac{2}{s^2 + 11s + 24}$, Rta.: $y(t) = 2e^{-3t}/5 - 2e^{-8t}/5$

(c) $F(s) = \frac{2s - 3}{s^2 + 2s + 10}$, Rta.: $y(t) = 2e^{-t} \cos(3t) - 5e^{-t} \sin(3t)/3$

(d) $F(s) = \frac{1 - 2s}{s^2 + 4s + 5}$. Rta.: $y(t) = 5e^{-2t} \sin(t) - 2e^{-2t} \cos(t)$

- (2) Resuelva cada uno de los siguientes problemas de valor inicial usando la transformada de Laplace.

(a) $y'' - 2y' + 2y = 0$, donde $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, Rta.: $y(t) = 2e^t \cos t - 2e^t \sin t$

(b) $y^{iv} - 4y = 0$, donde $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$, $y'''(0) = 0$,
Rta.: $y(t) = e^{-\sqrt{2}t}/4 + e^{\sqrt{2}t}/4 + 3 \cos(\sqrt{2}t)/2$

(c) $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$, donde $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, Rta.: $y(t) = t^2 e^{-t} + t e^{-t} + e^{-t}$

(d) $y^{iv} - 4y^{iii} + 6y'' - 4y' + y = 0$, donde $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$.
Rta.: $y(t) = t^3 e^t/2 - t^2 e^t + t e^t$

- (3) A continuación se muestra una forma alternativa de encontrar la transformada de Laplace de $f(t) = \sin t$.

- (a) Encuentre la serie de Taylor de $f(t)$ alrededor del cero y muestre que es igual a

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- (b) Suponga que la transformada de Laplace de una serie se puede calcular sumando la transformada de cada término de la serie. Encuentre la transformada de Laplace de cada término para probar que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s^{2n+2}}.$$

- (c) A partir de la expresión calculada en el ítem anterior muestre que

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

- (d) De forma similar, use una serie de Taylor para encontrar la transformada de la función $f(t) = e^t$.

- (4) Muestre que si $f(t)$ es una función cuya transformada existe para $s > a$ donde a es una constante, entonces

$$F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}.$$