UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Ecuaciones diferenciales (202610)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

6.1 La transformada de Laplace

Nota: todos los logaritmos son naturales.

(1) Encuentre la transformada de Laplace usando la definición de transformada.

(a) $f(t) = 1 - \cos(bt)$, **Rta.:** $F(s) = \frac{b^2}{s(s^2+b^2)}$

(b) $f(t) = \dfrac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$, donde $a \neq b$, **Rta.:** $F(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$

(c) $f(t) = t^2 \sin(at)$, **Rta.:** $F(s) = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$

(d) $f(t) = t^{-1/2}$,

(2) **La función Gamma.** Defina la función $\Gamma(t)$ como

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{t-1}\, dx.$$

Esta integral converge para todo $t > 0$.

(a) Muestre que $\Gamma(1) = 1$,

(b) Muestre que para todo $t > 0$ se cumple que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$,

(c) Muestre que para todo n entero positivo se cumple que $\Gamma(n+1) = n!$.

Habiendo estudiado la función Gamma podemos definir la transformada de Laplace de t^r para todo $r > -1$.

(d) Muestre que

$$\mathcal{L}\{t^r\} = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{t+1}}. \tag{TL}$$

(e) Muestre que si n es un entero positivo entonces $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

En el Ejercicio (1d) encontramos la transformada de $t^{-1/2}$ usando la definición. Ahora vamos a calcularlo usando el resultado (TL).

(f) Muestre que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ayuda: posiblemente esta integral apareció en cálculo vectorial. Considere

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx \right)^2.$$

Cambie la integral doble a coordenadas polares, no olvide el Jacobiano.

(g) Usando (TL) muestre que

$$\mathcal{L}(t^{-1/2}) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

(h) Nuevamente, usando (TL) muestre que

$$\mathcal{L}(t^{1/2}) = \sqrt{\frac{\pi}{4s^3}}.$$