

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Ecuaciones diferenciales (202610)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

<https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/>

4.1-4 Ecuaciones de orden superior

Nota: todos los logaritmos son naturales.

(1) Para cada uno de los siguientes ejercicios encuentre el intervalo en el cual existe solución única.

- (a) $y^{iv} + 4y^{iii} + 3y = t$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{iii}(0) = 0$,
- (b) $(t-1)y^{iv} + (t+1)y'' + \tan(t)y = 0$, $y(\pi/4) = y'(\pi/4) = y''(\pi/4) = y^{iii}(\pi/4) = 0$,
- (c) $(t^2-4)y^{vi} + t^2y^{iii} + 9y = 0$, donde $y^i(1) = 0$ para $i = 0, 1, \dots, 5$.

(2) Determine si los siguientes conjuntos de funciones son linealmente independientes o linealmente dependientes.

- (a) $y_1(t) = 2t - 3$, $y_2(t) = t^2 + 1$, $y_3(t) = t^2 - 1$,
- (b) $y_1(t) = 2t - 3$, $y_2(t) = t^2 + t$, $y_3(t) = t^2 + 1$,
- (c) $y_1(t) = 2t - 2$, $y_2(t) = t^2 + t$, $y_3(t) = t^2 + 1$,
- (d) $y_1(t) = \sinh(t)$, $y_2(t) = \cosh(t)$, $y_3(t) = e^t$, $y_4(t) = e^{-t}$.

(3) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

- (a) $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-t} + 3$,
- (b) $y^{iv} - 4y'' = t^2 + e^t$,
- (c) $y^{iv} + y''' = \sin(2t)$.

(4) Resuelva el siguiente problema usando el método de reducción de orden. Muestre que $y_1(t) = e^t$ es una solución al problema, suponga que $y(t) = u(t)y_1(t)$ es otra solución y encuentre la función $u(t)$.

$$(2-t)y^{iii} + (2t-3)y'' - ty' + y = 0, \text{ donde } t < 2.$$

(5) **Teorema de Abel.** Tenemos la ecuación

$$y^{iii} + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t) = 0, \tag{1}$$

donde $p_i(t)$ es continua par $i = 1, 2, 3$. Suponga que $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y_3(t)$ son soluciones en un intervalo I . El Wronskiano se define como

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}.$$

(a) Muestre que $W'(t)$ cumple

$$W'(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}.$$

(b) En $W'(t)$ reemplace y_1''' , y_2''' , y_3''' , y muestre que

$$W'(t) = p_1(t)W(t).$$

(c) Finalmente, muestre que el Wronskiano cumple la fórmula

$$W = C e^{\int p_1(t)W(t) dt}$$

donde C es una constante.