UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Ecuaciones diferenciales (202610)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

3.5 Raíces repetidas

Nota: todos los logaritmos son naturales.

(1) Encuentre la solución a cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $y'' + 6y' + 9y = 0$, **Rta.:** $y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-3t} + C_2 t\,\mathrm{e}^{-3t}$

(b) $4y'' - 4y' + y = 0$, **Rta.:** $y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-t/2} + C_2 t\,\mathrm{e}^{-t/2}$

(c) $9y'' + 12y' + 4y = 0$, **Rta.:** $y(t) = C_1 e^{-2t/3} + C_2 t\,\mathrm{e}^{-2t/3}$

(d) $y'' + 4\mathrm{i}y' + 4y = 0$, **Rta.:** $y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + C_2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}$

(2) Use el método de reducción de orden para encontrar la solución general a cada una de las siguiente ecuaciones

(a) $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$, donde $t > 0$, **Rta.:** $y(t) = C_1 t^{-1} + C_2 y^{1/2}$

(b) $t^2y'' + 2ty' - 2y = 0$, donde $t > 0$, **Rta.:** $y(t) = C_1 t + C_2 y^{-2}$

(c) $ty'' - y' + 4t^3y = 0$, donde $t > 0$ y $y(t) = \sin(t^2)$ es una solución,
Rta.: $y(t) = C_1 \sin(t^2) + C_2 \cos(t^2)$

(d) $t^2y'' + ty' + (t^2 - 1/4)y = 0$, donde $t > 0$ y $y(t) = \sqrt{t}\sin t$ es una solución.

(3) El operador de diferenciación $D : C^1(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})$ se define como

$$D(f) = f'.$$

Suponga que la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$ es tal que su polinomio característico $ar^2 + br + c = 0$ tiene raíz repetida.

(a) Muestre que la ecuación se puede reescribir como

$$a(D - r)^2 y = 0,$$

donde r es la raíz $ar^2 + br + c = 0$. Muestre además que $r = -b/2a$.

(b) Resuelva la ecuación $(D - b/2a)(D - b/2a)y = 0$ haciendo la sustitución $u = (D - b/2a)y$ y muestre que la solución general es

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-bt/2a} + C_2 t\,\mathrm{e}^{-bt/2a}.$$

(4) Suponga que dos números r_1 y r_2 son raíces distintas de la ecuación $ar^2 + br + c = 0$. En tal caso $y_1 = e^{r_1 t}$ y $y_2 = e^{r_2 t}$ son soluciones a la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$.

(a) Muestre que la función

$$\phi(t; r_1, r_2) = \frac{e^{r_2 t} - e^{r_1 t}}{r_2 - r_1}$$

también es una solución a la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$.

(b) Ahora piense r_1 como **una constante fija** y r_2 como **una variable**. Si tomamos el límite cuando r_2 tiende a r_1 nos queda una indeterminación de la forma $0/0$. Use la regla de L'Hopital para mostrar que

$$\lim_{r_2 \to r_1} \phi(t; r_1, r_2) = t\,\mathrm{e}^{r_1 t}.$$