

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Ecuaciones diferenciales (202610)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

<https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/>

3.4 Raíces complejas

Nota: todos los logaritmos son naturales.

(1) Encuentre la solución a cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $y'' + 9y = 0$, Rta.: $y(t) = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)$

(b) $9y'' + 9y' + 4y = 0$, Rta.: $y(t) = C_1 e^{-t/2} \cos(\sqrt{7}t/6) + C_2 e^{-t/2} \sin(\sqrt{7}t/6)$

(c) $4y'' + 9y = 0$, Rta.: $y(t) = C_1 \cos(3t/2) + C_2 \sin(3t/2)$

(d) $y'' + y' + 5y/4 = 0$, Rta.: $y(t) = C_1 e^{-t/2} \cos(t) + C_2 e^{-t/2} \sin(t)$

(2) Encuentre la solución general a cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $t^2 y'' + ty' + y = 0$, Rta.: $y(t) = C_1 \cos(\ln t) + C_2 \sin(\ln t)$

(b) $t^2 y'' + 3ty' + 5y/4 = 0$, Rta.: $y(t) = \frac{C_1}{t} \cos\left(\frac{\ln t}{2}\right) + \frac{C_2}{t} \sin\left(\frac{\ln t}{2}\right)$

(3) Considere la ecuación $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ donde $p(t)$ y $q(t)$ son funciones continuas en un intervalo abierto I . Suponga que $y(t) = u(t) + iv(t)$ es una solución a la ecuación. Muestre que tanto $u(t)$ como $v(t)$ también son soluciones a la ecuación diferencial.

(4) Suponga que la ecuación $ar^2 + br + c = 0$ tiene una raíz en la forma $\alpha + \beta i$.

(a) Muestre que $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

(b) Muestre que $\alpha - \beta i$ también es una raíz de la ecuación $ar^2 + br + c = 0$.

(5) Considere la ecuación $t^2 y'' + aty' + by = 0$ para $t > 0$. Suponga que las raíces de la ecuación característica son complejas e iguales a $\alpha \pm \beta i$.

(a) Muestre que la ecuación característica tiene la forma $r^2 + (a-1)r + c = 0$.

(b) Muestre que si $c = -a$ donde $a \neq 0$, entonces las raíces a la ecuación característica son $r_1 = 1/a$ y $r_2 = -1/2$.

(c) Encuentre el Wronskiano entre las funciones $y_1(t) = t^\alpha \cos(\beta \ln t)$ y $y_2(t) = t^\alpha \sin(\beta \ln t)$ y muestre que nunca es cero si $\beta \neq 0$.

(d) Suponga que $\alpha \pm i\beta$ son las raíces de la ecuación característica. Muestre que la solución general es

$$y(t) = C_1 t^\alpha \cos(\beta \ln t) + C_2 t^\alpha \sin(\beta \ln t).$$

(6) **Fórmula de Euler.** Este ejercicio busca demostrar la identidad de Euler que fue usada en esta sección.

(a) Encuentre la serie de Taylor de e^t alrededor del cero, y determine su intervalo de convergencia.

(b) Reemplace t por it para mostrar que

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

(c) Encuentre la serie de Taylor de $\sin(t)$ y $\cos(t)$ alrededor del cero y muestre que

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t).$$