Universidad de los Andes
Ecuaciones diferenciales (202610)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

3.2-3.3 Soluciones fundamentales e independencia lineal

Nota: todos los logaritmos son naturales.

(1) Determine el intervalo más grande posible donde la ecuación diferencial tiene solución única.

(a) $ty'' + 3y = t$, donde $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$

(b) $(t-2)y'' + y' + (t-2)\tan ty = 0$, donde $y(3) = 1$, $y'(3) = 2$

(c) $(t-3)y'' + ty' + \log ty = 0$, donde $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$

(2) Encuentre el Wronskiano de las siguientes funciones. Luego determine si las funciones son linealmente independientes.

(a) $f(t) = t\ln(t)$, $g(t) = \arcsin(t)$, $t > 0$,

(b) $f(t) = \sin(t)$, $g(t) = \cos(t)$

(c) $f(t) = \cos(3t)$, $g(t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$,

(d) las funciones $f(t)$ y $g(t)$ se definen como

$$f(t) = \begin{cases} (2-x)^2x^2\,\mathrm{e}^{-(x-1)^2}, & \text{si } 2 < x < 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases},$$

$$g(t) = \begin{cases} (2+x)^2x^2\,\mathrm{e}^{-(x+1)^2}, & \text{si } -2 < x < 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(3) Si el Wronskiano de f y g es $W(t) = 3\,\mathrm{e}^{4t}$ y $f(x) = \mathrm{e}^{2t}$ encuentre la función $g(t)$.

(4) Sean $u(t) = 2f(t) - g(t)$, $v(t) = f(t) + 2g(t)$ y $W_{fg}(t) = t\cos t - \sin t$ el Wronskiano de f y g. Encuentre $W_{uv}(t)$ el Wronskiano de u y v.

(5) Sean $y_1(t)$ y $y_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$ty'' + 2y' + t\,\mathrm{e}^t\,y = 0.$$

Suponga que $W(1) = 2$. Encuentre el valor de $W(5)$.

(6) Suponga que $p(t)$ es una función diferenciable y positiva. Muestre que el Wronskiano de dos soluciones a la ecuación

$$(p(t)y')' + q(t)y = 0,$$

es $W(t) = C/p(t)$ donde C es una constante.

(7) **Ecuación exacta de segundo orden.** Una ecuación de la forma

$$p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = 0,$$

se dice **exacta** si puede ser reescrita en la forma

$$(p(t)y)'' + (f(x)y)' = 0,$$

donde $f(x)$ es una función que depende solamente de $p(t)$, $q(t)$ y $r(t)$. Muestre que si una ecuación es exacta entonces

$$p''(t) - q'(t) + r(t) = 0.$$