Universidad de los Andes
Ecuaciones diferenciales (202610)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

2.6 Ecuaciones exactas

Nota: todos los logaritmos son naturales.

(1) Muestre que las siguientes ecuaciones son exactas y encuentre su solución general.

(a) $(3t^2y + 8ty^2)\,\mathrm{d}t + (t^3 + 8t^2y + 12y^2)\,\mathrm{d}y = 0,$ **Rta.:** $t^2y + 4(ty)^2 + 4y^3 = C$

(b) $(t^3 + ty^2\sin(2t) + y^2\sin^2(t))\,\mathrm{d}t + (2ty\sin^2(t))\,\mathrm{d}y = 0,$ **Rta.:** $ty^2\sin^2 x + t^4/4 = C$

(c) $\left(2t + \dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}t + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{t}{y^2}\right)\mathrm{d}y = 0,$ **Rta.:** $t^2 + t/y + \log|y| = C$

(d) $t\sqrt{t^2+y^2}\,\mathrm{d}t - \dfrac{t^2y}{y - \sqrt{t^2+y^2}}\,\mathrm{d}y = 0$, donde $y(1) = 0$. **Rta.:** $(t^2+y^2)^{3/2} + y^3 = 1$

(2) Para cada una de estas ecuaciones, encuentre el factor integrante que la hace exacta, luego resuelva la ecuación.

(a) $(t^2 + y^2 + x)\,\mathrm{d}t + ty\,\mathrm{d}y = 0,$ **Rta.:** $\mu(t) = t$, $3t^4 + 4t^3 + 6t^2y^2 = C$

(b) $y(2t + y^3)\,\mathrm{d}t - t(2t - y^3)\,\mathrm{d}y = 0,$ **Rta.:** $\mu(y) = y^{-3}$, $t^2 + ty^3 = Cy^2$

(c) $3(t+y)^2\,\mathrm{d}t + t(2t+3y)\,\mathrm{d}y = 0,$ **Rta.:** $\mu(t) = t$, $6(ty)^2 + 8t^3y + 3t^4 = C$

(d) $\mathrm{e}^t(t+1)\,\mathrm{d}t + (y\,\mathrm{e}^y - t\,\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}y = 0,$ **Rta.:** $\mu(y) = \mathrm{e}^{-y}$, $2t\,\mathrm{e}^{t-y} + y^2 = C$

(3) Considere la ecuación diferencial

$$y(2t^2y^3 + 3)\,\mathrm{d}x + t(t^2y^3 - 1)\,\mathrm{d}y = 0.$$

(a) Muestre que la ecuación no es exacta.

(b) Suponga que $\mu(x, y) = t^a y^b$ es un factor integrante. Encuentre el valor de a y de b de modo que la ecuación sea exacta.

Rta.: $a = 7/5$, $b = -9/5$

(c) Resuelva la ecuación diferencial usando el factor integrante encontrado en el ítem anterior.

(4) Muestre que al multiplicar la ecuación

$$y(2t - y - 1)\,\mathrm{d}t + t(2y - t - 1)\,\mathrm{d}y = 0,$$

por el factor integrante

$$\mu(t, y) = \frac{1}{ty(t + y + 1)}$$

se transforma en una ecuación exacta. Encuentre la solución.

Rta.: $(t + y + 1)^3 = Cty$

(5) Muestre que si la expresión

$$R = \frac{N_t - M_y}{tM - yN}$$

sólo depende de la cantidad ty entonces la ecuación diferencial $M(t, y)\,\mathrm{d}t + N(t, y)\,\mathrm{d}y = 0$ tiene un factor integrante de la forma $\mu(ty)$.