UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Ecuaciones diferenciales (202610)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

2.4 Existencia de soluciones

Nota: todos los logaritmos son naturales.

(1) Para cada una de las siguientes ecuaciones lineales de primer orden, determine un intervalo en el cual existe solución única.

(a) $y' + \ln(t)y = \dfrac{1}{t-3}$, donde $y(1) = 1$, **Rta.:** $(1/2, 2)$

(b) $(1-t^2)y' + y = \sqrt{t}$, donde $y(1/2) = 1$, **Rta.:** $(1/3, 2/3)$

(c) $(1-t^2)y' + y = \sqrt{t}$, donde $y(-2) = 1$, **Rta.:** $(-3, -3/2)$

(d) $t(t-4)y' + y = -\dfrac{1}{t-1}$, donde $y(3) = -1$. **Rta.:** $(2, 5/2)$

(2) Encuentre un intervalo en el cual existe una solución única para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales. En cada una de ellas, seleccione una condición inicial $y(t_0) = y_0$ donde existe tal solución única.

(a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{t-y}{2t+5y}$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\ln|ty|}{1-t^2+y^2}$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (t^2+y^2)^{3/2}$

(d) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{t^2}{y(1+t^3)}$

(3) Muestre que si $\phi(t)$ es una solución de la ecación $y' + p(t)y = 0$ entonces para toda constante K la función $K\phi(t)$ también es solución.

(4) Suponga que $y_{\mathrm{h}}(t)$ es una solución a la ecuación $y' + p(t)y = 0$, y además $y_{\mathrm{p}}(t)$ es $y' + p(t)y = q(t)$. Muestre que $y_{\mathrm{h}}(t) + y_{\mathrm{p}}(t)$ también es solución a la ecuación $y' + p(t)y = q(t)$.

(5) Considere la ecuación diferencial

$$y' + y = s(t), \qquad \text{donde } y(1) = 0, \tag{1}$$

y $s(t)$ es la siguiente función

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \le t, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Esta ecuación diferencial no cumple las hipótesis vistas en clase, por lo cual no se puede asegurar la existencia de una única solución. Lo que podemos hacer, es resolver dos ecuaciones, para $t < 0$ y para $t > 0$.

(a) Suponga que $t > 0$, escriba la ecuación (1) para este caso y encuentre una solución.
Rta.: $y(t) = 1 - \mathrm{e}^{1-t}$

(b) Suponga que $t < 0$, escriba la ecuación (1) para este caso y encuentre una solución.
Rta.: $y(t) = C\,\mathrm{e}^{-t}$

Lo que podemos hacer ahora es escoger las constantes de cada solución para que sean continuas en $t = 0$.

(c) Escoga la constante C tal que la función

$$y(t) = \begin{cases} 1 + \mathrm{e}^{1-t}, & \text{si } t \geq 0, \\ C\,\mathrm{e}^{-t}, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

sea continua en $t = 0$.

Rta.: $C = 1 + \mathrm{e}$

(d) Use este mismo método para resolver el problema

$$y' + ty = s(t), \qquad \text{donde } y(1) = 0,$$

y $s(t)$ es la siguiente función

$$s(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t \geq 0, \\ \mathrm{e}^{t^2/2}, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Rta.: $y(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{t^2/2-1/2} - 1, & \text{si } t > 0, \\ t\,\mathrm{e}^{t^2/2}, & \text{si } t < 0. \end{cases}$