Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

2.2 Ecuaciones separables

Nota: todos los logaritmos son naturales.

(1) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $t\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y$, **Rta.:** $y(t) = C|t|$

(b) $y' + y^2 \sin t = 0$, **Rta.:** $y(t) = \frac{1}{C - \cos t}$

(c) $y' = \dfrac{t - \mathrm{e}^{-t}}{y - \mathrm{e}^{y}}$, donde $y(0) = 0$, **Rta.:** $2 - \frac{t^2}{2} - \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{y} - \frac{y^2}{2}$

(d) $(t^2 - 1)\,\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}t}{\sin y}$, donde $y(0) = \pi/2$. **Rta.:** $\cos(y) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$

(2) Argumente el porqué las siguientes ecuaciones son homogéneas. Resuelva cada una usando la sustitución adecuada.

(a) $y' = \dfrac{4y - 3t}{2t - y}$, **Rta.:** $\frac{1}{2}\log|y/t - 1| - \frac{3}{2}\log|y/t + 1| = \ln|t| + C$

(b) $y' = \dfrac{t^2 - y^2}{2ty}$, **Rta.:** $y^2(t) = \frac{C + t^3}{3t}$

(c) $2t\,\mathrm{d}y = (3y^2 - t^2)\,\mathrm{d}t$, **Rta.:** $y^2(t) = Ct^3 + t^2$

(d) $y' = \dfrac{ty}{y^2 + ty + t^2}$, donde $y(1/2) = 1/2$. **Rta.:** $\log\left(\frac{y}{t} + t\right) + \log t + 1 = \frac{t}{y}$

(3) No todas las ecuaciones diferenciales homogeneas son el cociente de dos polinomios. En general una función $g(y, t)$ se dice **homogénea de grado** r si cumple que

$$g(y, t) = t^r h(u)$$

donde $u = y/t$ y h es una función que solo depende de la variable u.

(a) Determine si las siguientes funciones son homogéneas y en caso afirmativo encuentre el grado.

1) $g(y, t) = y^2 - t^2$, **Rta.:** homogénea de grado 2

2) $g(y, t) = \dfrac{y^2 - t}{y + t}$, **Rta.:** no es homogénea

3) $g(y, t) = t^{-3} + y^{-3}\log(y/t)$, **Rta.:** homogénea de grado -3

4) $g(y, t) = \sqrt{t}\tan(y/t)$, **Rta.:** homogénea de grado $1/2$

Una definición alternativa es $g(y, t)$ es homogénea de grado r si para todo $h > 0$

$$g(hy, ht) = h^r g(y, t).$$

(b) Use la segunda definición de función homogénea en el ejercicio anterior.

Con esta definición podemos dar una definición general de ecuación diferencial separable-homogénea.

> La ecuación diferencial $P(y, t) + Q(y, t)y' = 0$ se dice **separable-homogénea** de grado r si las funciones P y Q son funciones homogéneas de grado r.

Naturalmente, estas ecuaciones también se resuelven haciendo la sustitución $y = ut$.

(c) Muestre que las siguientes ecuaciones diferenciales son homogéneas. Determine el grado y resuelva las ecuaciones.

1) $t + \sqrt{y^2 - ty}\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}t = 0,$ **Rta.:** $y^3 + 3t^2y = C$

2) $\dfrac{y}{t}\cos\left(\dfrac{y}{t}\right) - \left(\dfrac{t}{y}\sin\left(\dfrac{y}{t}\right) + \cos\left(\dfrac{y}{t}\right)\right)y' = 0,$ **Rta.:** $y\sin\left(\frac{y}{t}\right) = C$

3) $y' - \dfrac{y}{t} + \csc\left(\dfrac{y}{t}\right) = 0$, donde $y(1) = 0$, **Rta.:** $\log t - \cos\left(\frac{y}{t}\right) = -1$

Como extra, se puede mostrar que la sustitución $y = ut$ siempre transforma una ecuación separable-homogénea en una separable.

(d) Muestre que si $P(y,t) + Q(y,t)y' = 0$ es una ecuación separable-homogénea entonces la sustitución $u = y/t$ la trasforma en una ecuación separable.