

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
**Ecuaciones diferenciales (202610)**  
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

<https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/>

## 2.1 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

**Nota:** todos los logaritmos son naturales.

(1) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a)  $y' + ty = 2$ ,

**Rta.:**  $y(t) = C e^{-t^2/2} + 2$

(b)  $t^3 y' + 4t^2 y = e^{-t}$ ,

**Rta.:**  $y(t) = \frac{C}{t^4} - \frac{e^{-t}}{t^4} - \frac{e^{-t}}{t^3}$

(c)  $ty' + 2y = t^2 - t + 1$ , donde  $y(1) = 1/2$ ,

**Rta.:**  $y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{12t^2} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2}$

(d)  $y' + y = 5 \sin(2t)$ , donde  $y(0) = 1$ .

**Rta.:**  $y(t) = 3 e^{-t} + \sin(2t) - 2 \cos(2t)$

(2) Realice la sustitución  $u(t) = y'(t)$  para resolver la ecuación diferencial.

(a)  $y'' + y' = 1$ ,

**Rta.:**  $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 + t$

(b)  $ty'' + 2y' = 2$ ,

**Rta.:**  $y(t) = \frac{C_1}{t} + C_2 + t$

(c)  $2t^2 y'' - ty' = 1$ ,

**Rta.:**  $y(t) = C_1 t^{3/2} + C_2 - \frac{\log(t)}{3}$

(d)  $\sin(t)y'' - \cos(t)y' = 1$ ,

**Rta.:**  $y(t) = C_1 \cos(t) + C_2 - \sin(t)$

(3) Las siguientes son ecuaciones diferenciales de Bernoulli. Realice la sustitución adecuada para resolver la ecuación.

(a)  $y' + \frac{y}{t} = \frac{y^2}{t}$ , donde  $y(-1) = 1$ ,

**Rta.:**  $y = 1$

(b)  $y' + ty = \frac{t}{y^3}$ ,

**Rta.:**  $y^4 = C e^{-2t^2} + 1$

(c)  $2 \cos t dy = (y \sin t - y^3) dt$ ,

**Rta.:**  $y^2 = 1/(C \cos t + \sin t)$

(d)  $t^2(t-1)y' - y^2 - t(t-2)y = 0$ , donde  $y(2) = 1$ .

**Rta.:**  $y = t^2/(3t-2)$

(4) Encuentre una ecuación diferencial lineal de primer grado cuya solución  $y(t)$  cumpla  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$ .

**Rta.:** Hay muchas ecuaciones, una puede ser  $y'(t) + 6y(t) = 6$

(5) Considere la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y' + p(t)y = q(t),$$

donde  $p(t)$  y  $q(t)$  son funciones continuas.

(a) Muestre que si  $q(t) = 0$  entonces la solución a la ecuación diferencial es

$$y(t) = C e^{-\int p(t) dt}$$

donde  $A$  es una constante.

(b) Suponga que  $q(t)$  no es la función cero. Suponga que la solución se ve de la forma

(1) 
$$y(t) = C(t) e^{-\int p(t) dt}.$$

Es decir, una forma similar al caso  $q(t) = 0$ , pero cambiando la constante con una función. Reemplace esta solución en la ecuación inicial y muestre que la función  $C(t)$  debe cumplir la ecuación diferencial

(2) 
$$C'(t) = q(t) e^{\int p(t) dt}.$$

Basado en la ecuación (2) la función  $C(t)$  es

$$C(t) = \int q(t) e^{\int p(t) dt} dt.$$

note que  $\int p(t) dt$  es justamente el factor integrante  $\mu(t)$ , entonces  $C(t) = \int q(t)\mu(t) dt$ . Reemplazando en (1) llegamos a la misma solución estudiada en el método de factor integrante.

- (6) Muestre que para  $a$ ,  $b$  y  $c$  constantes reales tales que  $a$  y  $b$  son positivas, toda solución a la ecuación

$$e^{bt} y' + a e^{bt} y = c,$$

cumple que  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .

- (7) **La ecuación de Ricatti.** Vamos a estudiar la ecuación diferencial  $y' = p(t) + q(t)y + r(t)y^2$  donde  $r(t)$  no es la función cero. Suponga que  $y_1(t)$  es una solución a la ecuación.

(a) Muestre que la sustitución  $y(t) = y_1(t) + 1/u(t)$ , transforma la ecuación de Ricatti en

$$(3) \quad u' + (q(t) + 2r(t)y_1(t))u = -r(t).$$

A partir de la ecuación (3) podemos encontrar la función  $u(t)$ , y con esta la solución general a la ecuación reemplazando en  $y(t) = y_1(t) + 1/u(t)$ . Usando este método resuelva la siguientes ecuaciones.

(b)  $y' = t^3 + \frac{2y}{t} - \frac{y^2}{t}$ , donde una solución conocida es  $y_1(t) = -t^2$ ,      Rta.:  $y(t) = -t^2 + \frac{2t^2 e^{t^2}}{e^{t^2} + C}$

(c)  $y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2$ , donde una solución conocida es  $y_1(t) = 1/t$ .      Rta.:  $y(t) = \frac{1}{t} + \frac{2}{Ct^3 - t}$