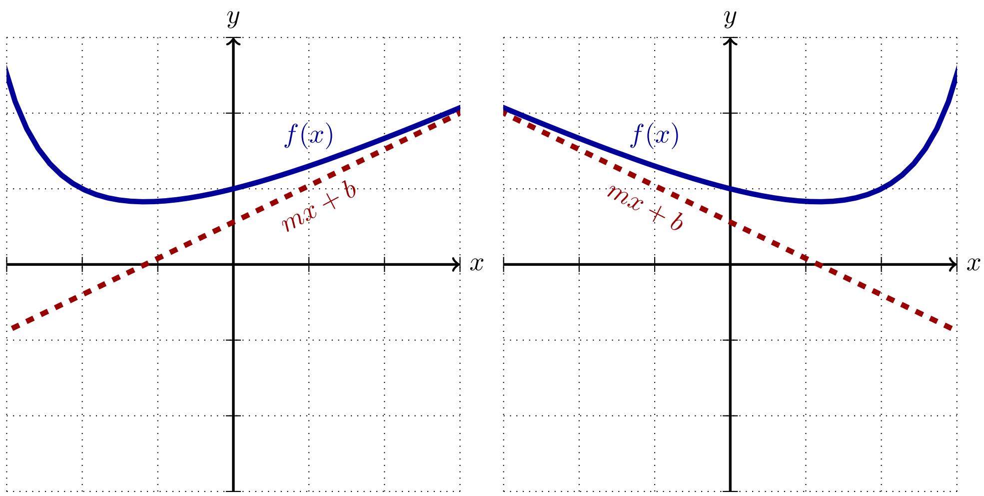
1. Asíntotas oblicuas

Dada una función f decimos que la recta $mx+b$ es una asíntota oblicua de la función si

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(mx+b)]=0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$$



En palabras, tenemos una asíntota oblicua si el comportamiento al cual se asemeja la función $f(x)$ es similar a una recta cuando x es muy grande en magnitud.

1.1. Funciones racionales

Como primer caso estudiamos las asíntotas oblicuas de las funciones del tipo

$$f(x)=\frac{P(x)}{D(x)},$$

donde $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios no constantes tales que el grado de $P(x)$ es uno mas que el grado del polinomio $D(x)$. En este caso, para encontrar la asíntota oblicua efectuamos la división $P(x)/D(x)$. El cociente es un polinomio de grado uno con residuo $R(x)$ de grado menor a $D(x)$. Es decir, si

$$\frac{P(x)}{D(x)}=(ax+b)+\frac{R(x)}{D(x)}.$$

Entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{D(x)}-(ax+b)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{R(x)}{D(x)}=0.$$

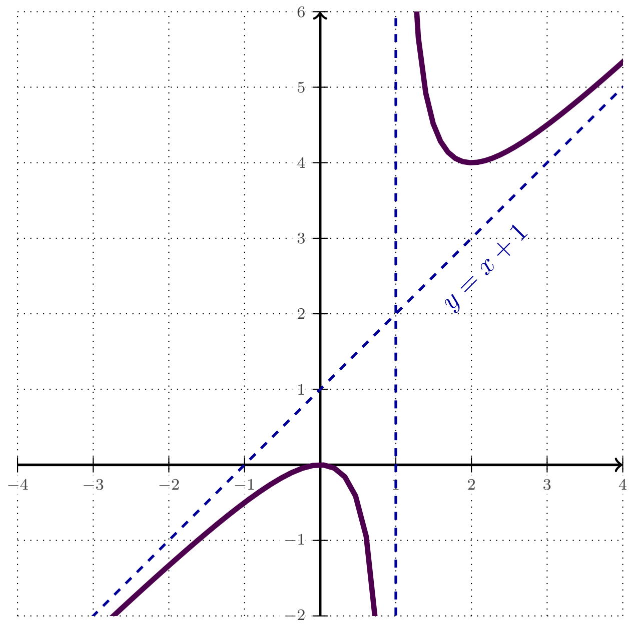
En este caso tenemos una asíntota oblicua: $y=ax+b$.

Ejemplo 1.2. Encontrar la asíntota oblicua de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Solución. Efectuamos la división de polinomios

$$\frac{x^2}{x-1}=(x+1)+\frac{1}{x-1}.$$

El primer término (el que está en azul) corresponde al cociente de la división, mientras que el numerador del segundo (el que está en rojo) corresponde al residuo. Este cociente, corresponde a la asíntota oblicua. Es decir, la asíntota oblicua para la función $f(x)$ es $y=x+1$.

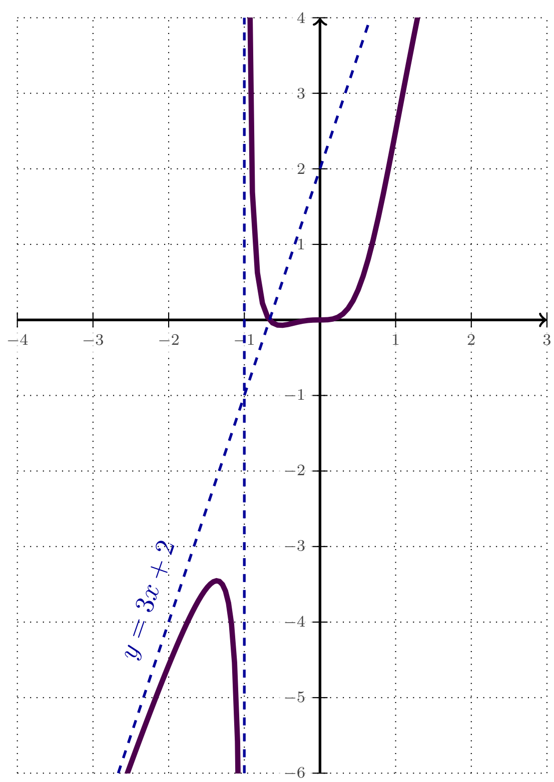


Ejemplo 1.3. Encontrar la asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^3}{x^3 + 1}$.

Solución. Efectuamos la división de polinomios

$$\frac{3x^4 + 2x^3}{x^3 + 1} = (3x + 2) + \frac{-3x - 2}{x^3 + 1}.$$

El primer término corresponde a la asíntota oblicua. Es decir, la asíntota oblicua para la función $f(x)$ es $y = 3x + 2$.



Una función puede tener dos asíntotas oblicuas, una en cada dirección: a la derecha (es decir a $+\infty$) y a la izquierda (es decir a $-\infty$).

Ejemplo 1.4. Encontrar las asíntotas oblicuas de la función

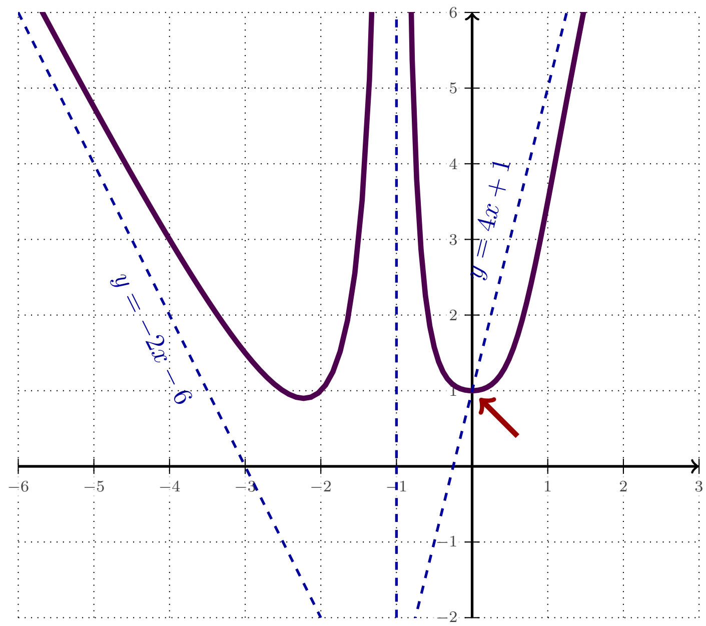
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^4 + x^3 + x^2 + 1}{x^3 + 1}, & \text{si } x > -1 \\ -\dfrac{2x^2 + 8x + 9}{x + 1}, & \text{si } x \leq -1 \end{cases}.$$

Solución. A pesar que la función es a trozos, todas sus partes son polinomios. Entonces efectuamos la división en cada parte de la función.

$$\frac{4x^4 + x^3 + x^2 + 1}{x^3 + 1} = (4x + 1) + \frac{x^2 - 4x}{x^3 + 1}, \quad x > -1.$$

$$-\frac{2x^2 + 8x + 9}{x + 1} = (-2x - 6) + \frac{3}{x + 1}, \quad x \leq -1.$$

Entonces esta tiene dos asíntotas oblicuas, una para cuando $x \to \infty$ la cual es $y = 4x + 1$ y otra para $x \to -\infty$ la cual es $y = -2x - 6$.



Note que la asíntota puede cortar o tocar la gráfica de la función. Las únicas funciones que llegan a coincidir con su asíntota son las funciones que eventualmente **toman la forma** de una función lineal $y = mx + b$. Por ejemplo, una función lineal $f(x) = 3x - 4$ coincide con su asíntota oblicua porque es una función lineal.

1.5. Funciones en general

Cuando tenemos funciones no necesariamente racionales existe un proceso para encontrar las asíntotas oblicuas, si es que las tiene.

Dada una función $f(x)$:

(1) Encuentre el límite

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

si este límite existe y da como resultado un número distinto a cero, entonces tiene una asíntota oblicua

(2) Calcule

$$b = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx.$$

Este número sí puede ser cero.

(3) La asíntota oblicua es $y = mx + b$ donde m es el valor encontrado en (1) y b es el valor encontrado en (2).

Para encontrar su asíntota en la dirección $-\infty$, basta con cambiar todos los límites a $\lim\limits_{x\to-\infty}$.

Si en (1) el límite dio como resultado cero, entonces no tiene asíntota oblicua.

Ejemplo 1.6. Encontrar la asíntota oblicua de la función $f(x) = \sqrt{x^2+1}+1$.

Solución. Seguimos los pasos indicados. Primero busquemos asíntotas a $+\infty$.

(1) Encontremos la pendiente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Como dio distinto a cero tiene una asíntota oblicua a $+\infty$. Además tenemos que $m = 1$.

(2) Ahora el corte:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \underbrace{\sqrt{x^2+1}+1}_{f(x)} - \underbrace{x}_{mx} &= \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) + \lim_{x\to\infty} 1 = 1 + \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Entonces $b = 1$

(3) Tiene asíntota oblicua y es $y = x + 1$.

Para el caso $-\infty$ el cálculo es similar

(1)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}}{1} = -1.$$

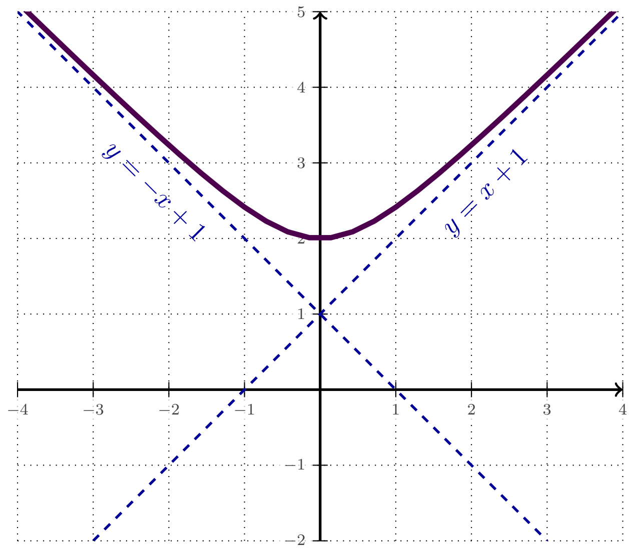
Como dio distinto a cero tiene una asíntota oblicua a $-\infty$. Además tenemos que $m = -1$ en esta asíntota.

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \underbrace{\sqrt{x^2+1}+1}_{f(x)} - \underbrace{x}_{mx} &= \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) + \lim_{x\to-\infty} 1 = 1 + \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Entonces $b = 1$

(3) Tiene asíntota oblicua y es $y = (-1)x + 1 = -x + 1$.



Ejemplo 1.7. Encontrar la asíntota oblicua de la función $f(x) = x(-2 + \sin(2/x))$.

Solución. Primero busquemos asíntotas a $+\infty$.

(1)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(-2+\sin(2/x))}{x} = \lim_{x\to\infty} (-2+\sin(1/x)) = -2.$$

Como dio distinto a cero tiene una asíntota oblicua a $+\infty$. Además tenemos que $m = -2$.

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x(-2+\sin(2/x)) - (-2)x &= \lim_{x\to\infty} -2x + x\sin(2/x)) + 2x \\ &= \lim_{x\to\infty} x\sin(2/x)) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2/x)}{1/x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(2/x)\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \cos(1/x) = 2\end{aligned}$$

Entonces $b = 2$

(3) Tiene asíntota oblicua y es $y = -4x + 2$.

Para el caso $-\infty$ el cálculo es similar, de hecho da la misma asíntota.

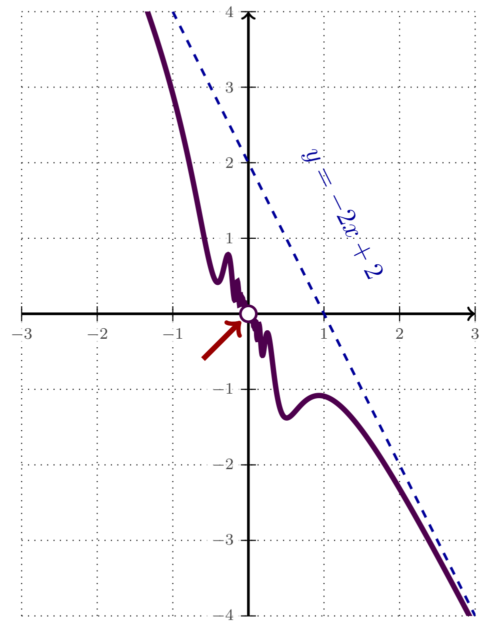
(1)
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x(-2+\sin(1/x))}{x} = -4.$$

Como dio distinto a cero tiene una asíntota oblicua a $-\infty$. Además tenemos que $m = -4$ en esta asíntota.

(2)
$$\lim_{x\to-\infty} 2x(-2+\sin(1/x)) - (-6)x = 2$$

Entonces $b = 2$

(3) Tiene asíntota oblicua y es $y = -4x + 2$.



Note que $x = 0$ no está en el dominio. Esta función es bastante interesante a medida que x se acerca a cero.

Ejemplo 1.8. Encontrar la asíntota oblicua de la función $f(x) = x\ln(1/x^2) + 2$.

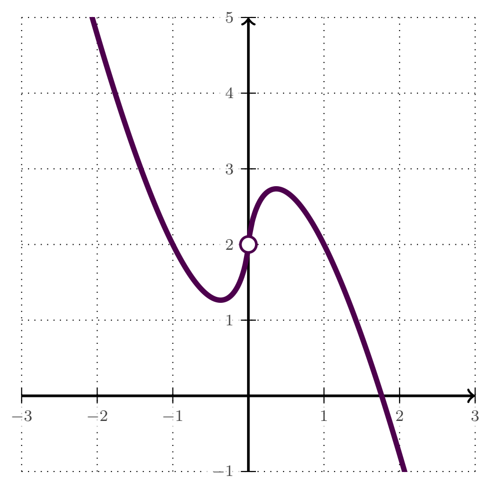
Solución. Primero busquemos asíntotas a $+\infty$.

(1)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln(1/x^2) + 2}{x} = \lim_{x\to\infty} \ln(1/x^2) + 2/x = 0.$$

Como dio cero esta función no tiene una asíntota oblicua a $+\infty$.

Para el caso $-\infty$ el cálculo es similar.



Este método también sirve para las funciones racionales que se describieron previamente.

Ejemplo 1.9. Encontrar la asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{-3x^5 + 4x^4 + 2x - 10}{2x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 1}$.

Solución. Primero busquemos asíntotas a $+\infty$.

(1)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-3x^5+4x^4+2x-10}{2x^4+2x^3-x^2+x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^5 + 4x^4 + 2x - 10}{2x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 - x} = -\frac{3}{2}.$$

Entonces tiene una a asíntota oblicua a $+\infty$ y además $m = -3/2$.

(2)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^5+4x^4+2x-10}{2x^4+2x^3-x^2+x-1} - \frac{-3x}{2} = \lim_{x\to\infty} \frac{14x^4-3x^3+3x^2+x-20}{4x^4+4x^3-2x^2+2x-2} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}.$$

Entonces $b = 3/2$.

(3) Tiene una asíntota oblicua a $+\infty$ y es $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.

Para el caso $-\infty$ también obtenemos la asíntota $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.