Universidad de los Andes
Cálculo diferencial (202510)
Ejercicios para practicar

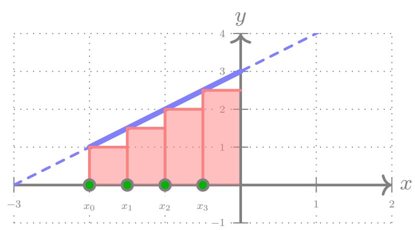
Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

5.1 Sumas de Riemann

(1) Realice una aproximación al área bajo la curva usando los datos que allí se indican. Realice un dibujo que exponga como se está haciendo la aproximación.

(a) De la función $f(x) = x + 3$ entre $x = -2$ y $x = 0$ dividiendo el intervalo en cuatro partes iguales ($n = 4$) y usando los puntos extremos **izquierdos**. Rta.: $7/2$

Solución: son cuatro partes las que usaremos, entonces $a = -2$, $b = 0$, $n = 4$, $\Delta x = (0-(-2))/4) = 2/4 = 1/2$ y además queremos usar el extremo **izquierdo** de cada subdivisión. Es decir, tomaremos $x_i^* = a + i\Delta x$ con $i = 0, 1, 2, 3$.



Obtenemos los puntos $x_0^* = -2$, $x_1^* = -2 + 1/2 = -3/2$, $x_2^* = -2 + 1 = -1$, $x_3^* = -2 + 3/2 = -1/2$. Una aproximación del área es

$$\begin{aligned}\text{Área} \approx \sum_{i=0}^{3} f(x_i^*)\Delta x &= (-2+3)\cdot\frac{1}{2} + (-3/2+3)\frac{1}{2} + (-1+3)\frac{1}{2} + (-1/2+3)\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{5}{4} = \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

(b) De la función $f(x) = x^2 + 1$ entre $x = -1$ y $x = 2$ dividiendo el intervalo en tres partes iguales y usando los puntos extremos **derechos**.

Rta.: 8

(c) De la función $f(x) = x^2 + 1$ entre $x = -1$ y $x = 2$ dividiendo el intervalo en tres partes iguales y usando los puntos extremos **izquierdos**.

Rta.: 5

(d) De la función $f(x) = x^3 - x^2 - 1/16$ entre $x = 0$ y $x = 3$ dividiendo el intervalo en seis partes iguales y usando los puntos extremos **derechos**.

Rta.: 16

(e) De la función $f(x) = x^3 - x$ entre $x = -2$ y $x = 2$ dividiendo el intervalo en seis partes iguales y usando los puntos extremos **derechos**.

Rta.: 6

(f) De la función $f(x) = x^3 - x$ entre $x = -2$ y $x = 2$ dividiendo el intervalo en seis partes iguales y usando los puntos extremos **izquierdos**.

Rta.: -6

(g) De la función $f(x) = \cos(x)$ entre $x = 0$ y $x = 2\pi$ dividiendo el intervalo en cuatro partes iguales y usando los puntos **izquierdos**.

Rta.: 0

(h) De la función $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ entre $x = -1$ y $x = 1$ dividiendo el intervalo en cuatro partes iguales y usando los puntos **centrales**.

Rta.: $8/5$

(2) Encuentre el área bajo la curva de las siguientes funciones entre los límites dados usando sumas de Riemann.

(a) $f(x) = x + 3$ entre $x = -2$, y $x = 0$. Rta.: 4

Solución: en este caso $\Delta x = (b-a)/n = (0-(-2))/n = 2/n$. Usaremos el límite izquierdo, es decir $x_i^* = a + i\Delta x = -2 + 2i/n$ donde $i = 0, 1, \ldots, n-1$. La suma de Riemann para esta partición es

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(-2 + \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(-2 + \frac{2i}{n} + 3\right)\frac{2}{n}$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{4}{n} + \frac{4i}{n^2} + \frac{6}{n}\right) = -\sum_{i=0}^{n-1}\frac{4}{n} + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{4i}{n^2} + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{6}{n}$$
$$= -4 + \frac{4}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i + 6 = 2 + \frac{4}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}$$

Note que $\sum_{i=0}^{n-1} i = \sum_{i=1}^{n}(i-1) = \sum_{i=1}^{n} i - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2-3n}{2}$. Entonces:

$$= 2 + \frac{4}{n^2}\frac{n^2-3n}{2} = 2 + \frac{4n^2-12n}{2n^2}.$$

Tomando el límite al infinito obtenemos el valor del área bajo la curva

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{4n^2-12n}{2n^2}\right) = 2 + 2 = 4.$$

(b) $f(x) = x^2$ entre $x = 0$, y $x = 3$. Rta.: 9

(c) $f(x) = x^2 + 1$ entre $x = -1$, y $x = 2$. Rta.: 6

(d) $f(x) = 1 - x^2$ entre $x = 0$, y $x = 1$. Rta.: 2/3

(e) $f(x) = x^3$ entre $x = -1$, y $x = 2$. Rta.: 15/4

(3) A continuación se muestran límites de sumas de Riemann, determine cual es el área que calcula esta expresión.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right].$

Solución: Esta expresión representa el área bajo la curva $y = x^2 + 1$ entre cero y uno. Pues, la suma de Riemann es de la forma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta(x)$, entonces la expresión que contiene i es el $f(x_i)$. Por tal razón $f(x_i) = (i/n)^2 + 1$, luego $f(x) = x^2 + 1$ y además $x_i = i/n$. Recordemos que $x_0 = a$ el valor desde el cual se empieza a calcular el área, y $x_n = b$ el valor final hasta el cual se desea calcular el área. Luego

$$a = x_0 = 0/n = 0, \quad b = x_n = n/n = 1.$$

Finalmente, nos toca encontrar cuanto es $\Delta(x)$, pero esto se obtiene por simple inspección, puesto que el sumando es $f(x_i)\Delta x$ se tiene que $x = 1/n$. De modo que la expresión

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta(x)}\underbrace{\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right]}_{f(x_i)}$$

calcula el área de la función $f(x) = x^2 + 1$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + 1\right].$ Rta.: el área bajo la curva $y = x^2 + 1$ entre $x = 0$ y $x = 2$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left[\left(2 + \frac{3i}{n}\right)^4 - 1\right].$ Rta.: el área bajo la curva $y = x^4 - 1$ entre $x = 2$ y $x = 5$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{i}{n}\right) - 4\right].$

Rta.: el área bajo la curva $y = x^2 + 2x - 4$ entre $x = 1$ y $x = 2$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{(1 + \frac{i}{n})}\right].$ Rta.: el área bajo la curva $y = 1/(x+1)$ entre $x = 0$ y $x = 1$

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2 + i^2}.$ Rta.: el área bajo la curva $y = 1/(x^2+1)$ entre $x = 0$ y $x = 1$