

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Cálculo Diferencial (202310)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

4.2 El teorema del valor medio

(1) Explique la diferencia entre el teorema del valor **intermedio** y el teorema del valor **medio**.

(2) Muestre que las ecuaciones tienen una única raíz real

(a) $x^3 + 2x - 1 = 0$

(b) $x^3 - 7x^2 + 25x + 8 = 0$

(3) Aproxime $e^{5/7}$, usando el teorema del valor medio y que $e \approx 27/10$.

(4) Aproxime $\tan(4)$, usando el teorema del valor medio y que $4 \approx 5\pi/4$, $\pi \approx 157/50$.

(5) Aproxime $\sqrt[5]{31}$, usando el teorema del valor medio.

(6) Pruebe la identidad

$$\arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2 \arctan \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}.$$

(7) Muestre que la ecuación $6x^4 - 7x + 1 = 0$ no puede tener más de dos raíces reales distintas.

(8) Muestre la siguiente desigualdad usando el teorema del valor medio en la función $f(x) = \sin x$.

$$|\sin y - \sin x| \leq |y - x|,$$

donde $0 \leq x, y \leq 2\pi$.

(9) Muestre la siguiente desigualdad usando el teorema del valor medio en la función $f(x) = e^{-x}$.

$$|e^{-y} - e^{-x}| \leq |y - x|,$$

donde $0 \leq x, y \leq 2\pi$.

(10) A las 10:00 am una persona paga un peaje, del cual recibe una factura. Cien kilómetros más adelante la persona es detenida por un policía y tienen la siguiente conversación:

- Buenos días, ¿hace cuánto pasó el peaje? ¿tiene el recibo?
- Hace poco menos de una hora, mire el recibo.
- Sabe usted que esta carretera tiene un límite máximo de velocidad de 80 km/h.
- Sí, pero no veo el problema, no he excedido el límite.
- Me temo que sí, debió exceder ese límite al menos una vez.

¿Cómo supo el policía que había excedido el límite de velocidad?

Ayuda: Hay dos formas de ver esto. Una por lógica rápida, y la otra usando el teorema del valor medio.

*(11) Un número a es un punto fijo de una función f si $f(a) = a$. Suponga que una función f es tal que $f'(x) \neq 1$ para todo x , muestre que la función tiene a lo sumo un punto fijo. Es decir, no puede tener dos o más puntos fijos.