Universidad de los Andes
Cálculo Diferencial (202310)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

3.1-3.2 Reglas de derivación I y II

(1) Encuentre la derivada de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = 4x^3 \mathrm{e}^x - 4$. Rta.: $12x^2 \mathrm{e}^x + 4x^3 \mathrm{e}^x$.

(b) $f(x) = \dfrac{4x^3}{\mathrm{e}^x - 4}$. Rta.: $\dfrac{12x^2 \mathrm{e}^x - 48 - 4x^3 \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 4)^2}$.

(c) $f(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^x$. Rta.: $\dfrac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,\mathrm{e}^x$.

(d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{\sqrt{x}}$. Rta.: $\dfrac{3\sqrt{x}}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x^3}}$.

(e) $f(x) = 4\pi^2 - e$. Rta.: 0.

(f) $h(s) = \sqrt{2}s + \sqrt{3s}$. Rta.: $\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{s}}$.

(g) $s(t) = (t + t^{-1})^3$. Rta.: $3t^2 + 3 - \dfrac{3}{t^2} - \dfrac{3}{t^4}$.

(h) $g(r) = (\sqrt{r} + \sqrt[3]{r})^2$. Rta.: $1 + \dfrac{5}{3\sqrt[6]{r}} + \dfrac{3\sqrt{r}}{2}$.

(i) $z(s) = \mathrm{e}^{s+2} - 1$. Rta.: $\mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^s (= \mathrm{e}^{s+2})$.

(j) $u = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$

(k) $v = \dfrac{(x^2+1)\,\mathrm{e}^x - 1}{\sqrt{x} + x^2}$

(l) $w = \dfrac{\sqrt{t+1}}{\mathrm{e}^t + t}$

(2) Encuentre la recta tangente a la función en el punto dado.

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{x+2} - 1$ cuando $x = -2$. Rta.: $y = x$.

(b) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ cuando $x = -1$. Rta.: $y = 2$.

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1} - x$ cuando $x = 1$. Rta.: $y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}$.

(d) $g(t) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^x - (x-1)e^x$ cuando $x = 1$. Rta.: $y = \dfrac{\mathrm{e}}{2}x + \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

(3) Encuentre $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ si $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son contantes.

(4) Dada una ecuación de movimiento $s(t)$, sabemos que $s'(t)$ nos dice la velocidad con la cual se mueve la partícula en el instante t. Además de esto, la segunda derivada $s''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$ nos dice la aceleración que tiene la partícula en el instante t.

La ecuación de movimiento de una partícula es $s(t) = 2t^3 - 7t^2 + 4t + 1$, donde s se mide en metros y t en segundos. Encontrar la velocidad de la partícula y su aceleración a los 3 segundos.

Rta.: Velocidad 8 m/s, Aceleración 22 m/s^2.

(5) Si $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ hallar $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^3y}{dx^3}, \dfrac{d^4y}{dx^4}, \dfrac{d^5y}{dx^5}, \dfrac{d^6y}{dx^6}$.

Rta.: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2}{(1-x)^3}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{6}{(1-x)^4}$,

$\dfrac{d^4y}{dx^4} = \dfrac{-24}{(1-x)^5}$, $\dfrac{d^5y}{dx^5} = \dfrac{120}{(1-x)^6}$, $\dfrac{d^6y}{dx^6} = \dfrac{-720}{(1-x)^7}$.

(6) Se tiene un tanque de cierto volumen A en litros [li], el cual es drenado en un tiempo de dos minutos. Según la Ley de Torricelli el volumen que tendrá el tanque a los t minutos es

$$V(t) = A\left(1 - \frac{t}{2}\right)^2, \quad 0 \le t \le 2.$$

Se conoce que al minuto uno, la velocidad de drenaje es -10 li/min. Halle el volumen del tanque A.

Rta.: Calcule la derivada, evalúe en $t = 1$, eso debe igualarlo a -10. $A = 20$ li.

(7) Suponga $f(2) = -3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$ y $g'(2) = 7$. Encuentre $h'(2)$ donde $h(x) = g(x)/(1 + f(x))$.

Rta.: Calcule la derivada, evalúe en $x = 2$. $-3/2$.

(8) Suponga que f es una función diferenciable tal que $f(2) = f'(2) = -1$. Encuentre la derivada de la función $h(x) = (x^2 + \mathrm{e}^x)f(x)$ en $x = 2$.

(9) Muestre que si f y g son funciones diferenciables, entonces $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g$.