Universidad de los Andes
Cálculo Diferencial (202310)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

2.7 Derivadas

(1) Encuentre $f'(a)$ dada la función f

(a) $f(x) = \sqrt{x}$. Rta.: $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

(b) $f(x) = x^2 + 2x + 4$. Rta.: $2a + 2$

(c) $f(x) = t^3 - 1$. Rta.: $3a^2$

(d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Rta.: $\dfrac{-2}{(a+1)^2}$

(e) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$. Rta.: $\dfrac{-1}{(a-2)^2}$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Rta.: $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(a-1)^2}}$

(g) $f(x) = \dfrac{|1-x|x}{1+x}$, con $x \neq 1$, $x \neq -1$. Rta.: $\begin{cases} \dfrac{-a^2 - 2a + 1}{(a+1)^2}, & \text{si } a < 1, a \neq -1 \\ \dfrac{a^2 + 2a - 1}{(a+1)^2}, & \text{si } a > 1 \end{cases}$

(2) Demuestre que no existe la derivada de $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x}$ en $x = -1$.

(3) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la función en el punto dado.

(a) $f(x) = 1/x^2$, en $(1, 1)$. Rta.: $y = 3 - 2x$.

(b) $f(x) = 1/\sqrt{x}$, en $(2, \sqrt{2}/2)$. Rta.: $y = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} - \dfrac{x}{4\sqrt{2}}$.

(c) $h(t) = 3t^2 - 5t$, en $(0, 0)$. Rta.: $y = -5t$

(d) $g(s) = \dfrac{5s}{1+s^2}$, en $(2, 2)$. Rta.: $y = \dfrac{16}{5} - \dfrac{3x}{5}$

(4) Los siguientes límites representan la derivada de cierta función f en cierto valor a. Diga cual es la función f y el valor de a en cada uno de los casos.

(a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{10} - 1}{h}$. Rta.: $f(x) = x^{10}$, $a = 1$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\tan(x) - 1}{x - \pi/4}$. Rta.: $f(x) = \tan(x)$, $a = \pi/4$.

(c) $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^4 + t - 2}{t - 1}$. Rta.: $f(x) = x^4 + x - 3$, $a = 1$.

(d) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$. Rta.: $f(x) = \cos(x)$, $a = \pi$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{2^x - 32}{x - 5}$. Rta.: $f(x) = 2^x$, $a = 5$.

(5) Determine si $f'(0)$ existe si f está definida como:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Rta.: No existe la derivada

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Rta.: Existe la derivada, da cero.

(c) Para un número natural $n > 2$

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Rta.: Existe la derivada, da cero.

(6) Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo a la ecuación $s = 100+50t-4{,}9t^2$, donde s está medido en metros y t en segundos. Determine la velocidad a la que se mueve la partícula cuando $t = 5$.

Rta.: Se mueve a una velocidad de 1 metro por segundo.

(7) Si un tanque cilíndrico tiene inicialmente 100000 galones de agua, el cual es drenado por la parte inferior del tanque en una hora, entonces la ley de Torricelli nos dice que el volumen de agua que hay en el tanque después de t minutos es

$$V(t) = 100000\left(1 - \frac{t^2}{60}\right), \quad 0 \leq t \leq 60.$$

Encuentre la tasa de cambio a la cual el agua sale del tanque como una función de $t = a$.

Rta.: Le están preguntando cuanto es $V'(t)$ evaluado en $t = a$.