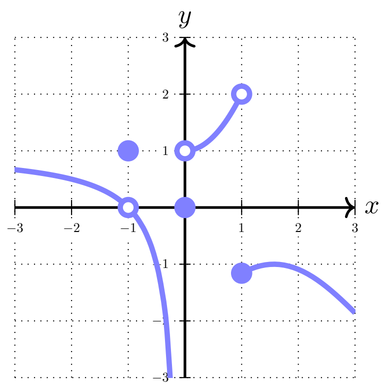
Universidad de los Andes
Cálculo diferencial (202510)
Ejercicios para practicar

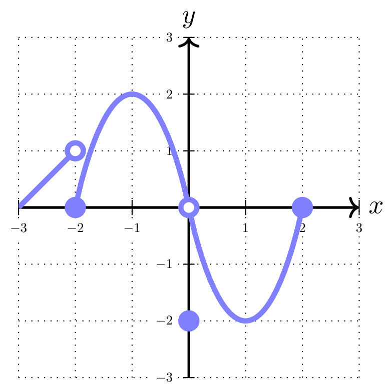
Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

2.5 Funciones continuas

(1) A continuación se muestra la gráfica de ciertas funciones. Determine en qué puntos es discontinua, argumente la razón por la cual es discontinua. Una vez encuentre los puntos de discontinuidad, investigue si es continua por derecha o por izquierda en esos puntos.



(a)



(b)

(2) Determine el dominio en el cual las siguientes funciones son continuas

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\arcsin(x)}{x^2-1}$. Rta.: $\mathrm{Dom}(f) = (0, 1)$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x} + \log(x-1)$. Rta.: $\mathrm{Dom}(f) = (1, 3]$

(c) $f(x) = \arcsin(x+1)$. Rta.: $\mathrm{Dom}(f) = [-2, 0]$

(d) $f(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x+1}}{x-1} + \sqrt{x^2-4} - \dfrac{\log(x+3)}{x^2-6x+8}$. Rta.: $\mathrm{Dom}(f) = (-3, -2] \cup [2, 4) \cup (4, \infty)$

(e) $h(t) = e^{\sqrt{1-t}}$. Rta.: $\mathrm{Dom}(h) = (-\infty, 1]$

(3) Determine si la función es continua en el dominio dado.

(a) $f(x) = \sqrt[4]{1-x}$, $x \in (-\infty, 1]$. Rta.: es continua

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Rta.: es continua

(4) La función $f(s)$ está definida como

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{s^2-16}{s-4}, & \text{si } s \neq 4 \\ a, & \text{si } s = 4 \end{cases}$$

¿Qué valor debe tomar a para que la función f sea continua en $s = 4$? Rta.: $a = 8$

(5) Encontrar los valores de a y b que hacen la función f continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & \text{si } x > 1 \\ ax^2 - bx + 2, & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2x - a + b, & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

Rta.: $a = b = 2$

(6) Decida si las siguientes funciones tienen discontinuidades evitables y en caso de tenerlas encuentre la nueva función en la cual es continua en ese punto.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$. Rta.: evitable en $x = -1$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ Rta.: evitable en $x = 1$

(c) $f(x) = \dfrac{x + 1}{|x + 1|}$ Rta.: inevitable en $x = -1$

(7) Demuestre que las siguientes ecuaciones tienen al menos una raíz en el intervalo dado.

(a) $\cos(x) - x = 0$, $x \in [0, \pi/2]$.

Solución: la idea es usar el teorema del valor intermedio para mostrar que la expresión $\cos(x) - x$ toma el valor cero en algún punto x_0 del intervalo. Sea $f(x) = \cos x - x$, entonces $f(x)$ es una función continua en todo su dominio. En particular, es continua en el intervalo $[0, \pi/2]$. Por otro lado, $f(0) = \cos 0 - 0 = 1$ y $f(\pi/2) = \cos \pi/2 - \pi/2 = -\pi/2$. Entonces el valor $y_0 = 0$ está entre $f(\pi/2)$ y $f(0)$. Por el teorema del valor intermedio existe un x_0 entre 0 y $\pi/2$ tales que $f(x_0) = y_0 = 0$. En conclusión, para x_0 se tiene que $\cos x_0 - x_0 = 0$ con $x_0 \in [0, \pi/2]$, lo cual prueba que la ecuación tiene al menos una raíz en el intervalo indicado.

(b) $x^4 + x - 3 = 0$, $x \in [1, 2]$.

(c) $\sqrt[3]{x} = 1 - x$, $x \in [0, 1]$.