

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Cálculo diferencial (202510)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

<https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/>

2.3 Límites: calcular límites

(1) Encuentre los siguientes límites por evaluación directa.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 3}.$ Rta.: 1/3

(b) $\lim_{x \rightarrow -3} x^2 - 2x.$ Rta.: 15

(c) $\lim_{t \rightarrow \pi} \frac{5[\cos(3t)]^4}{\sin(t/2)}.$ Rta.: 5

(d) $\lim_{s \rightarrow 4^-} \sqrt{16 - s^2}.$ Rta.: 0

(e) $\lim_{s \rightarrow 4} \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}.$ Rta.: 3

(f) $\lim_{s \rightarrow -1} 3^{\frac{1+x}{1-x}}.$ Rta.: 1

(2) Encuentre los siguientes límites simplificando la expresión algebraica y evaluando.

(a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4 + h)^2 - 16}{h}.$ Rta.: 15

(b) $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{h^3 - 1}{h - 1}.$ Rta.: 3

(c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^2 - 4}{(3 + h)^2 - 9}.$ Rta.: 2/3

(d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h}.$ Rta.: -1/4

Solución: operamos la fracción del numerador para luego simplificar la expresión:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2-2-h}{2(2+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{h}{2(2+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{h}{2h(2+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

El límite existe y es igual a -1/4

(e) $\lim_{h \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{h} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{h+2} - \frac{1}{4}}.$ Rta.: 2

(f) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$ Rta.: -1/16

(3) Para cada uno de los siguientes límites multiplique por la expresión adecuada para eliminar la raíz, luego simplifique y evalúe el límite.

(a) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7}.$ Rta.: 6

(b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$ Rta.: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Solución: eliminamos la raíz del numerador y denominador:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1-9}{x-2-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}+3} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-8}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-8}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3} = 2 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3} \\
 &= 2 \frac{\sqrt{4-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{8+1}+3} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.
 \end{aligned}$$

(c) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$. Rta.: $-\frac{4}{5}$

(d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\sqrt{2+h}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Rta.: $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ Rta.: $\frac{3}{2}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$ Rta.: $\frac{q}{p}$

(4) Los siguientes límites incluyen expresiones con valor absoluto. Encuentre el límite o muestre que no existe.

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{|x+1|}$. Rta.: no existe

(b) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2-1}{|t-1|}$. Rta.: no existe

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-x^2|}{x-1}$ Rta.: no existe

(d) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{|2x-1|}{x-1/2}$ Rta.: no existe

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{|x|-1}$ Rta.: -1

Solución: para hacernos una idea de cómo es la función, vamos a reescribirla como una función a trozos:

$$\frac{1-x}{|x|-1} = \begin{cases} \frac{1-x}{x-1}, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1-x}{-x-1}, & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -1, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1-x}{-x-1}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Entonces el límite es igual a menos uno.

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{|x+2|} - \frac{1}{2}}{x}$ Rta.: -4

(5) Factorice la expresión para calcular los límites.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2+2x-8}$ Rta.: $1/4$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ Rta.: $1/4$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5-32}{x^3-8}$ Rta.: $20/3$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+5x-6}{x^3-1}$ Rta.: $8/3$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ Rta.: $1/2$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + 7x^2 + 2x - 40}$$

Rta.: 5/42

Solución: el numerador se puede factorizar por agrupación de términos, reescribiéndolo como $x^3 - 4x - 3x + 6 = x(x^2 - 4) - 3(x - 2) = x(x - 2)(x + 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x(x + 2) - 3) = (x - 2)(x^2 + 2x - 3)$. El denominador se factoriza de forma un poco más “creativa”. Reescribimos -40 como $-28 - 8 - 4$ y agrupamos:

$$\begin{aligned} x^3 + 7x^2 + 2x - 40 &= x^3 - 8 + 7x^2 - 28 + 2x - 4 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 7(x^2 - 4) + 2(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 7(x - 2)(x + 2) + 2(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4 + 7(x + 2) + 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4 + 7x + 14 + 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 9x + 20). \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + 7x^2 + 2x - 40} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x - 3)}{(x - 2)(x^2 + 9x + 20)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 9x + 20} = \frac{4 + 4 - 3}{4 + 18 + 20} = \frac{5}{42}.$$

Estas factorizaciones pueden ser difíciles de ver a golpe de vista, así que sugerimos una forma distinta de factorizar. Dado que ambas expresiones se anulan para $x = 2$ entonces ambas son divisibles por $x - 2$. Podemos usar división sintética para factorizarlas.

$$\begin{array}{r|rrrr} x = 2 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 2 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} x = 2 & 1 & 7 & 2 & -40 \\ & & 2 & 18 & 40 \\ \hline & 1 & 9 & 20 & 0 \end{array}$$

Es decir $x^3 - 7x + 6 = (x - 2)(x^2 + 2x - 3)$ y $x^3 + 7x^2 + 2x - 40 = (x - 2)(x^2 + 9x + 20)$, que es la misma factorización obtenida anteriormente.

(6) Acote la expresión por arriba y por abajo para encontrar el valor del límite.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos(1/x).$$

Rta.: 0

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \arctan(1/(x - 1)).$$

Rta.: 0

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \sin(1/x) - 1).$$

Rta.: -1

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} (3 + x^2 e^{\sin(1/x)}).$$

Rta.: 3

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \arcsin(1/x).$$

Rta.: 0

Solución: la función $\arcsin$ está acotada entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, es decir $-\pi/2 \leq \arcsin \leq \pi/2$. Calcularemos límites laterales, empezando por $x \rightarrow 0^+$. Cuando x se acerca a cero por la derecha entonces $x > 0$, y además $x^3 > 0$. De esta forma para todo $x > 0$ se cumple que

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leq \arcsin(1/x) \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi x^3}{2} &\leq x^3 \arcsin(1/x) \leq \frac{\pi x^3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\pi x^3}{2} &\leq \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \arcsin(1/x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi x^3}{2} \\ 0 &\leq \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \arcsin(1/x) \leq 0. \end{aligned}$$

Entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \arcsin(1/x) = 0$. El límite por la izquierda es un tanto similar. Si $x < 0$ entonces $x^3 < 0$, luego para $x < 0$

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leq \arcsin(1/x) \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi x^3}{2} &\geq x^3 \arcsin(1/x) \geq \frac{\pi x^3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{\pi x^3}{2} &\geq \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 \arcsin(1/x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi x^3}{2} \\ 0 &\geq \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 \arcsin(1/x) \geq 0. \end{aligned}$$

El límite por la izquierda también es cero. Como los límites laterales existen y ambos son iguales a cero, entonces el límite existe y es igual a cero.

(f) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) \cos(1/(2 - x)).$

Rta.: 0

(7) Evalúe

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Ayuda: Haga el cambio de variables $x = y^3$.

Rta.: 1/9

- (8) En teoría de la relatividad, la fórmula de correlación de Lorentz $L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ expresa la longitud L de un objeto como una función de su velocidad v con respecto a un observador, donde L_0 es la longitud de el objeto en reposo y c es la velocidad de la luz. Encontrar $\lim_{v \rightarrow c^-} L$ e interprete este resultado.

Rta.: $\lim_{v \rightarrow c^-} L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = 0$

(9) La función de Dirichlet se define como

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es un número racional;} \\ 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional.} \end{cases}$$

- (a) Encuentre $f(0)$, $f(\pi)$, $f(-e)$, $f(-1)$, $f(1/2)$ y $f(1/9)$.

Rta.: 1, 0, 0, 1, 1, 1

- (b) Argumente la razón por la cual $f(1/n) = 1$ para todo n número natural.

- (c) Argumente la razón por la cual $f(1/(n\pi)) = 0$ para todo n número natural.

- (d) Observe que tanto $1/n$ y $1/(n\pi)$ se acercan a cero (tan cerca como queramos) cuando n se hace cada vez mas grande. ¿Las imágenes se acercan (tan cerca como queramos) a un único valor en común?

Rta.: no

- (e) Argumente la razón por la cual $\lim_{x \rightarrow 0} D(x)$ no existe.