Universidad de los Andes
Parcial 3
Álgebra Lineal 1 (202119)
Lunes 19 de Julio de 2021

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

[Prob. 1] **(15 Pts)** Considere el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^5$ y sea W el subespacio vectorial generado por los vectores $\langle -1, 1, 0, 0, 0 \rangle$, $\langle 0, 0, 1, 0, 1 \rangle$ y $\langle -1, 0, 0, 1, 0 \rangle$.

(a) **(+5 Pts)** Encuentre una **base ortonormal** para W.

(b) **(+5 Pts)** Encuentre la proyección del vector $\vec{\mathbf{v}} = \langle 0, a, 0, 2a, 0 \rangle$ sobre el espacio W.

(c) **(+5 Pts)** Encuentre una **base** para el complemento ortogonal $W^{\perp}$.

[Prob. 2] **(15 Pts)** Considere la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ y - x \end{bmatrix}$$

(a) **(+4 Pts)** Muestre directamente de la definición que la transformación es lineal,

(b) **(+4 Pts)** Encuentre la matriz de transformación con respecto a la base canónica,

(c) **(+4 Pts)** Encuentre la transformación inversa de T. Es decir: encuente $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $U(T(\vec{\mathbf{x}})) = \vec{\mathbf{x}}$ para todo $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ y $T(U(\vec{\mathbf{x}})) = \vec{\mathbf{x}}$ para todo $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$.

Ayuda: Puede utilizar el siguiente resultado sin mostrarlo:

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal y su matriz de transformación es A, y además $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es su transformación inversa entonces la matriz de representación de T^{-1} es A^{-1}.

(d) **(+3 Pts)** Grafique la imagen bajo la transformación T del cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$ y $(-1, 1)$.

[Prob. 3] **(10 Pts)** Sea $T : P_3 \to P_3$ la transformación dada por

$$T\left(p(t)\right) = p''(t) + 2p'(t).$$

Esta transformación es lineal (no debe probarlo). Desarrolle

(a) **(+4 Pts)** Encuentre la matriz de transformación A asociada a T,

(b) **(+3 Pts)** Encuentre la imagen y el rango,

(c) **(+3 Pts)** Encuentre el núcleo y la nulidad,

[Prob. 4] **(5 Pts)** Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal.

(a) **(+2.5 Pts)** Muestre que el núcleo de T es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

(b) **(+2.5 Pts)** Muestre que la imagen de T es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

[Prob. 5] **(5 Pts)** Responda falso o verdadero (no debe justificar)

(a) Si T es transformación lineal, entonces la matriz de transformación debe ser cuadrada.

(b) Si $\det(A) = 0$ entonces la transformación $T(\vec{\mathbf{x}}) = A\vec{\mathbf{x}}$ es invertible.

(c) La imagen de una transformación puede ser el conjunto $\{\vec{\mathbf{0}}\}$.

(d) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz ortogonal, y $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz invertible entonces AB es invertible.

(e) Si W es un subespacio vectorial de V y $\vec{\mathbf{v}} \in V$ es un vector, es imposible que $\mathrm{Proy}_W \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$.