UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Álgebra Lineal (202020)

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

---

(1) Demuestre que para una matriz A de tamañon $n \times n$ con valor propio λ se tiene que E_λ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

(2) Encuentre los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) Encuentre los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$$

(4) Muestre que si A es una matriz triángular superior o inferior, entonces los valores propios son los valores de la diagonal.

(5) En clase vimos un teorema general, el cual indica que para una matriz A con valores propios λ_1, λ_2, ..., λ_m, los vectores propios correspondientes $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, ..., $\vec{\mathbf{v}}_m$ son linealmente independiente. Pruebe el caso particular para dos valores propios: Muestre que si λ y μ son valores propios distintos de una matriz A entonces los vectores propios correspondientes $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{u}}$. Entonces $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{u}}$ son linealmente independientes.

(6) Sea A una matriz de tamaño $n \times n$, sea $p(\lambda)$ el polinomio característico. Muestre que $p(A) = \mathbf{0}_{n\times n}$.

(7) Una matriz A se dice semejante a una matriz B si existe una matriz invertible C tal que $A = C^{-1}BC$. Muestre que si A y B son semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico.

(8) Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $H^\perp$ el complementeo ortogonal de H. Sea $\vec{\mathbf{v}}$ un vector de $\mathbb{R}^n$. Sabemos que $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_h + \vec{\mathbf{v}}_p$, donde $\vec{\mathbf{v}}_h$ pertenece a H y $\vec{\mathbf{v}}_p$ pertenece al complemento. Muestre que $\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{v}}_h\|^2 + \|\vec{\mathbf{v}}_p\|^2$

(9) Sea A y B matrixes ortogonales. Muestre que $B^{-1}AB$ es una matriz ortogonal.

(10) **(Retador)** Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ tal que $A\vec{\mathbf{x}} \cdot A\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}}$ para todo par de vectores $\vec{\mathbf{x}}$ e $\vec{\mathbf{y}}$ en $\mathbb{R}^n$. Muestre que A es una matriz ortogonal.

(11) Sea $\{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, ..., \vec{\mathbf{v}}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, sea C una matriz ortogonal de tamaño $n \times n$. Muestre que $\{C\vec{\mathbf{v}}_1, C\vec{\mathbf{v}}_2, ..., C\vec{\mathbf{v}}_n\}$ también es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

(12) Considere $C([-1,1])$ como el espacio vectorial de todas las funciones continuas definidas en $[-1,1]$. Defina el producto interno (producto punto) entre dos funciones del espacio de la siguiente forma

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Defina $f_n(t) = \cos(nt)$ y $g_m(t) = \sin(mt)$.

(a) Encuentre el producto interno entre $f_n(t)$ y $g_m(t)$.
(b) Encuentre el producto interno entre $f_n(t)$ y $f_m(t)$.
(c) Encuentre el producto interno entre $g_n(t)$ y $g_m(t)$.