Universidad de los Andes
Álgebra Lineal (202119)

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

---

7. Transformaciones lineales

(1) Sea $T = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y - z \\ 2y + z \\ -x + 4y \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre la imagen del vector $\langle 2, -1, 4 \rangle$ bajo la transformació T.
(b) Determine si existe un vector $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(\vec{\mathbf{v}}) = \langle 1, 0, -1 \rangle$.
(c) Determinse si la transformación T es transformación lineal.

(2) Sean $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dos transformaciones definidas por

$$T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \\ -x - y \end{bmatrix}, \quad T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x + y)/2 \\ -(y + z)/2 \end{bmatrix}.$$

Resuelva

(a) Muestre que ambas transformaciones son lineales.
(b) Encuentre la transformación $U(\vec{\mathbf{u}}) = T_1(T_2(\vec{\mathbf{u}}))$.
(c) Encuentre el núcleo e imagen de T_1, T_2 y U.
(d) Encuentre la nulidad y el rango (rank) de T_1, T_2 y U.

(3) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal de los espacios vectoriales V y W. Muestre que el conjunto $\ker(T)$ es un subespacio vectorial de V y que el conjunto $\mathrm{Im}(T)$ es un subespacio de W.

(4) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal de los espacios vectoriales V y W. Muestre que $T(\vec{\mathbf{0}}_V) = \vec{\mathbf{0}}_W$.

(5) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal de los espacios vectoriales V y W. Muestre que T es una transformación inyectiva si y solo si $\ker(T) = \{\vec{\mathbf{0}}_W\}$.

(6) Para cada una de las siguientes transformaciones halle la imagen bajo esta transformación del cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.

(a)
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ y \end{bmatrix}.$$

(b)
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ x + y \end{bmatrix}.$$

(c)
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}.$$

(d)
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 2y \end{bmatrix}.$$

(e)
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

(f)
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x \\ x + y \end{bmatrix}.$$

(7) Sea $T : \mathbb{R}^{\to}\mathbb{R}^2$ la transformación

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{3}y}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{y}{2} \end{bmatrix}.$$

Resuelva

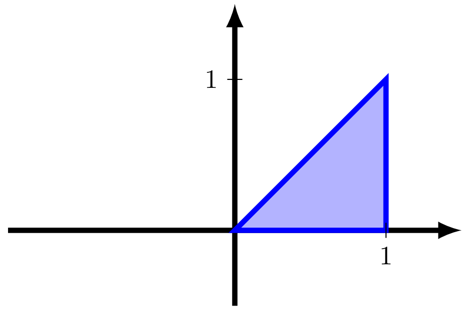
(a) Encuentre la imagen del vector $\langle\, 0, 1\,\rangle$, y del vector $\langle\, 1, 0\,\rangle$.

(b) Encuentre la imagen del la recta $y = 2x$ bajo esta transformación.

(c) Encuentre la imagen del segmento de recta $y = x$ cuando $x \in [0, 1]$ bajo esta transformación.

(d) Encuentre la imagen del segmento de recta $y = 0$ cuando $x \in [0, 1]$ bajo esta transformación.

(e) Encuentre la imagen del segmento de recta $x = 1$ cuando $y \in [0, 1]$ bajo esta transformación.



Verifique que aplicó bien la transformación usando el siguiente applet de Geogebra: rotation matrix. En la primera casilla, en la cual dice t reemplaze por $\pi/3$.

Si quiere jugar un poco con estas aplicaciones intente esta: messing with Lisa.

(8) Encuentre la matriz que toma un polinomio de grado a lo sumo tres, y lo integra entre meos uno y uno.

(9) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ -y \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentre la matriz de transformación de T.

(b) Muestre que la transformación es una función inyectiva.

(c) Muestre que para todo vector $\vec{\mathbf{y}}$ en el espacio de llegaga $\mathbb{R}^2$, existe un vector $\vec{\mathbf{x}}$ en el espacio de salida $\mathbb{R}^2$ tal que $T(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{y}}$.

(d) Encuentre una transformación $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que sea la inversa de T. Es decir, tal que $T(U(\vec{\mathbf{v}})) = \vec{\mathbf{v}}$.

(10) Decimos que una transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es invertible[1] si existe una transformación $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(U(\vec{\mathbf{v}})) = \vec{\mathbf{v}}$ y $U(T(\vec{\mathbf{w}})) = \vec{\mathbf{w}}$ para todo $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^n$ y se denota por T^{-1}. Muestre que si T es una transformación invertible y su matriz asociada es A, entonces la matriz asociada a la inversa T^{-1} es la matriz A^{-1}.

(11) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ -y \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentre la matriz de transformación de T.

(b) Escriba la matriz de transformación como producto de matrices elementales.

(c) Interprete geométricamente qué hace cada matriz elemental de la matriz de transformación y basado en esto interprete geométricamente qué hace la transformación.

(12) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ y + 2z \\ x + z \end{bmatrix}.$$

[1] Este definición es para el caso particular en que el espacio de salida y llegada es el mismo e igual a $\mathbb{R}^n$.

(a) Encuentre la matriz de transformación A_T considerando las bases canónicas.

(b) Encuentre el kernel, imagen, nulidad y rango de T.

(c) Encuentre la matriz de transformación A_2 pero esta vez tome como base del espacio de salida el conjunto

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para el espacio de llegada considere la base canónica.

(d) Encuentre la matriz de transformación A_3 pero esta vez tome como base del espacio de llegada el conjunto

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para el espacio de salida considere la base canónica.

(e) Encuentre la matriz de transformación A_2 pero esta vez tome como base del espacio de salida el conjunto

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para el espacio de llegada considere la base

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(13) Sea $\{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n\}$ un conjunto de n vectores en un espacio $\mathbb{R}^m$ y se A la matriz

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{\mathbf{v}}_1 & \vec{\mathbf{v}}_2 & \cdots & \vec{\mathbf{v}}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Muestre que si la columna i no tiene pivote, entonces $\vec{\mathbf{v}}_i$ es combinación lineal de los otros vectores. En general, muestre que si las columnas i_1, i_2, $\ldots$, i_k no tienen pivote, entonces estas son combinación lineal de aquellas que sí tienen pivote.