Universidad de los Andes
Álgebra Lineal (202119)

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

---

5. Espacios vectoriales

(1) Resuelva los siguientes problemas relacionados a espacios vectoriales.

(a) Sea S el conjunto de todas las matrices simétricas de tamaño $n \times n$ con n fijo, con la suma usual y la multiplicación por escalar usual. Determine si es un espacio vectorial.

(b) Sea Q el conjunto de todos los polinomios $p(x)$ de cualquier grado tal que $p(1) = 0$, con la suma usual y la multiplicación por escalar usual. Determine si es un espacio vectorial.

(c) Sea T el conjunto de todos los vectores con tres entradas reales. Defina la suma $\oplus$ como

$$\langle\, a_1, a_2, a_3 \,\rangle \oplus \langle\, b_1, b_2, b_3 \,\rangle = \langle\, a_1 + b_2, b_1 + a_2, a_3 - b_3 \,\rangle\,.$$

Determine si T es un espacio vectorial cuando se dota de la suma $\oplus$ y la multiplicación usual por escalar

(d) Sea SC el conjunto de todas las funciones continuas $f(t)$ con dominio en $[0, 1]$ tal que $\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t = 1$, con la suma y la multiplicación por escalar para funciones usual. Determine si SC es un espacio vectorial.

(e) Sea S el conjunto de todas las soluciones a la ecuación diferencial $y' + 2y = 0$, con la suma y la multiplicación usual entre funciones diferenciables. Determine si S es un espacio vectorial.

(2) Resuelva los siguientes problemas relacionados a subespacios vectoriales.

(a) Sea P el subconjunto de todos los vectores en $\mathbb{R}^n$ tal que la suma de todas sus entradas da cero. Muestre que P es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con la suma y multiplicación por escalar usual.

(b) Sea $\mathbb{R}^{n\times n}$ el espacio vectorial de todas las matrices de tamaño $n \times n$ con la suma y multiplicación usual entre matrices. Sea Q el subconjunto de todas las matrices invertibles de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Determine si Q es un subespacio.

(c) Sea L la línea en $\mathbb{R}^2$ que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(-1, 2)$. Determine si L es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ con la suma y multiplicación por escalar usual.

(d) Sea P el plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$, $(-1, 2, 1)$ y $(-2, 1, -3)$. Determine si P es u subespacio de $\mathbb{R}^3$ con la suma y multiplicación por escalar usual.

(e) Sea F_2 todas las matrices de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que al elevarlas al cuadrado da la matriz identidad. Determine si F_2 es un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ con la suma y la multiplicación por escalar usual.

(3) Sea S_n el conjunto de todas las matrices triángulares superiores de tamaño $n \times n$, dotado de la multiplicación por escalar usual y la suma de matrices usual.

(a) Muestre directamente que S_n es un espacio vectorial.

(b) Muestre que S_n es un subespacio vectorial de M_n el espacio vectorial de todas las matrices de tamaño $n \times n$ con la suma de matrices y multiplicación por escalar usual.

(4) Mustre que P_3 (el espacio de polinomios de grado a lo sumo 3) cumple que

$$P_n = \operatorname{span}\{1, 1 - x, 1 - x^2, 1 - x^3\}.$$

(5) Determine si la matriz A se puede escribr como combinación lineal de las matrices A_1, A_2 y A_3 donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(6) Sean v_1 y v_2 vectores de un espacio vectorial V, muestre que $W = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ es un subespacio de V.

(7) En clase vimos un teorema, el cual dice que en todo espacio vectorial V se cumple que $0\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$.

(a) En los reales, muestre que $0x = 0$ para todo número real x.

(b) Intente imitar esta prueba para mostrar que $0\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$ para todo vector $\vec{\mathbf{v}}$ en un espacio vectorial V.