Universidad de los Andes
Álgebra Lineal (202119)

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

---

4. Vectores en el plano y en el espacio

(1) Dibuje los siguientes vectores y encuentre la magnitud y dirección de cada uno.

(a) $\vec{\mathbf{v}} = \langle -1, 2 \rangle$
(b) $\vec{\mathbf{x}} = \langle 4, 1 \rangle$
(c) $\vec{\mathbf{y}} = \langle 3, -2 \rangle$
(d) $2\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}$.

(2) Considere los vectores $\vec{\mathbf{x}} = \langle 1, -1, -1 \rangle$ y $\vec{\mathbf{y}} = \langle 2, 1, 0 \rangle$.

(a) Grafique los vectores en $\mathbb{R}^3$.
(b) Encuentre el ángulo entre los vectores.
(c) Encuentre y grafique $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}$.
(d) Encuentre el ángulo entre $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}$ y $\vec{\mathbf{x}}$.

(3) Encuentre la magnitud y dirección de cada vector. Si desea y sabe como manejar la herramienta puede dibujar los vectores en Geogebra `https://www.geogebra.org/3d?lang=es`

(a) $\vec{\mathbf{x}} = \langle 1, 1, -2 \rangle$
(b) $\vec{\mathbf{y}} = \langle 0, -1, 3 \rangle$
(c) $\vec{\mathbf{u}} = \langle -1, -1, 2 \rangle$
(d) $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, -1, 1/2 \rangle$
(e) $\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}} + 2\vec{\mathbf{v}} - 3\vec{\mathbf{u}}$

(4) A continuación veremos una definición alternativa de dirección usando ángulos directores.

(a) Grafice el segmenteo de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ que va desde el punto $P(1, 1, 1)$, hasta $Q(2, 2, 3)$.
(b) Dibuje en $\mathbb{R}^2$ el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{P'Q'}$ que va desde $P'(1, 1)$ a $Q'(2, 2)$ los cuales corresponden solo a las primera dos entradas de P y Q, y encuentre la dirección de este segmento en $\mathbb{R}^2$. Llame a esta dirección θ.
(c) Defina el ángulo γ como

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\|\overrightarrow{P'Q'}\|}{\|\overrightarrow{PQ}\|}\right), \quad \gamma \in [0, \pi].$$

El ángulo γ corresponde al que forma el segmento de recta con el eje z.

La pareja de ángulos (θ, γ) son una definición alternativa a la dirección de un segmento de recta dirigido. Usando esta definición alternativa de dirección, encuentre la dirección de los vectores

(a) $\vec{\mathbf{x}} = \langle 1, 1, -2 \rangle$
(b) $\vec{\mathbf{y}} = \langle 0, -1, 3 \rangle$
(c) $\vec{\mathbf{u}} = \langle -1, -1, 2 \rangle$
(d) $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, -1, 1/2 \rangle$

(5) Encuentre el ángulo entre los vectores.

(a) $\vec{\mathbf{x}} = \langle 1, 1, -2 \rangle$ e $\vec{\mathbf{y}} = \langle 0, -1, 3 \rangle$
(b) $\vec{\mathbf{u}} = \langle -1, -1, 2 \rangle$ y $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, -1, 1/2 \rangle$

(c) $\vec{\mathbf{u}} = \langle -1, 0, 2 \rangle$ y $\vec{\mathbf{v}} = \langle 0, -1, 1/2 \rangle$

(6) Encuentre

(a) La recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$ en dirección $\langle -1, 2, 1 \rangle$.

(b) La recta que pasa por los puntos $(1, 4, 3)$ y $(-1, 1 - 1)$.

(c) La recta que para por el punto $(2, 1/2, -1/3)$ y es **perpendicular** al plano $2x - z = 5$.

(d) La recta de intersección entre los planos $x + y - z = 1$ y $2x - y + 3z = -1$.

(e) El punto de intersección (si existe) de la recta que para por los puntos $(1, 1, 0)$ y $(-1, 2, 1)$ y la recta que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ en dirección $\langle 2, 1, 0 \rangle$.

(7) Encuentre

(a) El plano que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ es perpendicular al vector $\langle -1, 1, -2 \rangle$.

(b) El plano que para por el origen y es perpendicular a la recta

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \\ z = 4t - 2 \end{cases}$$

(c) El plano que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

(d) El plano paralelo al plano $2x + y - 5z = 3$ que pase por el punto $(1, 1, 1)$.

(e) Una recta que pase por el punto $(1, -1, 3)$ y que no esté intersecte el plano $x + y + z = 0$.

(f) El plano que contiene las rectas

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = 4t \end{cases}, \begin{cases} x = t \\ y = 5t \\ z = 0 \end{cases}$$

(8) Responda falso o verdadero.

(a) La intersección de cualquier par de planos es una línea.

(b) La intersección de cualquier par de líneas es un punto.

(c) La intersección de una línea con un plano es necesariamente un punto.

(9) Resuelva las siguientes situaciones. En cada uno argumente y procure escribir un argumento claro y completo (matemáticamente sustentado) de su respuesta.[1]

(a) Tenemos dos vectores $\vec{\mathbf{x}}_1$ y $\vec{\mathbf{x}}_2$ tales que $\vec{\mathbf{x}}_1 \cdot \vec{\mathbf{x}}_2 = \pm 1$. ¿Es cierto que los vectores son paralelos? Justifique su respuesta.

(b) Tenemos dos vectores $\vec{\mathbf{v}}_1$ y $\vec{\mathbf{v}}_2$ tales que $\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2 = 1$ y además $\|\vec{\mathbf{v}}_1\| = \pm 1$. ¿Es cierto que los vectores son paralelos? Justifique su respuesta.

(c) Tenemos dos vectores $\vec{\mathbf{v}}_1$ y $\vec{\mathbf{v}}_2$ tales que $\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2 = 1$ y además $\|\vec{\mathbf{v}}_1\| = \|\vec{\mathbf{v}}_2\| = \pm 1$. ¿Es cierto que los vectores son paralelos? Justifique su respuesta.

(10) Muestre que $\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$, para todo vector $\vec{\mathbf{v}}$ en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

(11) La desigualdad del triángulo dice que $\|\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}\| \leq \|\vec{\mathbf{v}}\| + \|\vec{\mathbf{w}}\|$ para todo par de vectores $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ en $\mathbb{R}^2$. En clase vimos que geométricamente esta desigualdad tiene sentido.

(a) ¿Qué condiciones deben cumplir $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ para que haya igualdad en la desigualdad del triángulo?

(b) Muestre la desigualdad del triángulo.

[1] Si usted afirma que es cierto tiene que probar que se cumple para cualquier par de vectores cuyo producto punto sea uno. Si usted afirma que es falso tiene que encontrar dos vectores tal que el producto punto sea uno pero la conclusión sea falsa.

(12) A continuación demostrarás la desigualdad de Cauchy-Schwarz :-).

(a) Pruebe que para cualquier par de vectores $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ en $\mathbb{R}^2$ distintos al vector $\langle 0, 0 \rangle$ se tiene que

$$-1 \leq \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\| \|\vec{\mathbf{w}}\|} \leq 1.$$

(b) Muestre la desigualdad de Cauchy-Schwarz: para cualquier par de vectores $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ en $\mathbb{R}^2$ se tiene que

$$|\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}| \leq \|\vec{\mathbf{v}}\| \|\vec{\mathbf{w}}\|.$$

(13) Tomemos cualquier par de vectores $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ en $\mathbb{R}^2$.

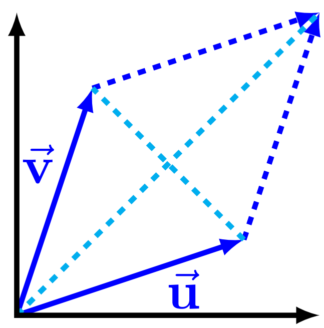
(a) Pruebe que $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$.

(b) Pruebe que $\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$.

(c) Pruebe que $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0$ si y solamente si $\vec{\mathbf{u}} = 0$.

(14) Pruebe la **relación del paralelogramo** en $\mathbb{R}^2$.

La suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un palalelogramo en $\mathbb{R}^2$ es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados.



Pista: Piense los lados como vectores, intente expresar las **magnitudes** de los demás lados y diagonales en términos de los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$. La igualdad que demostró en el item (10) puede ser útil.

(15) Un objeto con una masa de 100 libras pende de dos cuerdas fijas a un techo, formando un ángulo de 60° con una de las cuerdas y un ángulo de 45° con la otra cuerda. Encuentre la tensión (magnitud del vector de fuerza) a lo largo de cada pedazo de la cuerda.