Universidad de los Andes
Álgebra Lineal (202119)

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

---

3. Determinantes

(1) Encuentre el determinante de las matrices. Si es invertible, halle la inversa.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ -a & b & -a & b \\ b & -a & b & -a \end{bmatrix}$

(2) Escriba la matriz como producto de matrices elementales. Luego calcule el determinate de la matriz y el de cada matriz elemental: verifique que el producto de los determinates de las matrices elementales da el determinante de la matriz original.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) Responda falso o verdadero.

(a) Si $\det(AB) = 0$ entonces $\det(A) = 0$ o $\det(B) = 0$.

(b) Si $\det(A - B) = 0$ entonces $A = B$.

(c) Si $\det(A - B) = 0$ entonces $\det(A) = \det(B)$.

(d) Si $\det(A) = \det(B)$ entonces $A = B$.

(e) Si $\det(A) = \pm 1$ entonces A es una matriz elemental.

(f) Para todo par de matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ se cumple que $\det(AB) = \det(BA)$.

(4) Encuentre todos los valores reales de a que hacen la matriz invertible

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(5) Suponga que A es una matriz de tamaño $n \times n$ y que $\det(A) = 2$ y $\det(B) = 1/4$, encuentre $\det(\frac{1}{2}A^2B)$.

(6) Muestre que la matrix elemental que multiplica una fila por un escalar k tiene por deteminante el valor k.

(7) Muestre que la matrix elemental que suma a una fila un múltiplo escalar de otra tiene por determinante el valor 1.

(8) Muestre que si $\det(A) \neq 0$ entonces el sistema de ecuaciones $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ tiene solución única.

(9) Encuentre todos los valores reales de k que hacen que el sistema $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ tenga solución única donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ k & 1 & -2 \\ -k & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

(10) Sea A una matriz cuadrada de tamaño 2×2 y E una matriz elemental. Estudie qué efecto tiene la matriz E sobre A cuando realizamos la operación AE.

(11) Sea A una matriz invertible, muestre que existen matrices elementales E_1, E_2,... , E_n tales que $\det(A) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_n)$.

(12) Decimos que dos matrices cuadradas de $n \times n$, A_1 y A_2 son similares si existe una matrix B de tamaño $n \times n$ tal que $A_1 = BA_2B^{-1}$.

(a) Muestre que si A_1 y A_2 son similares y A_2 y A_3 son similares entonces las matrices A_1 y A_2 son similares.

(b) Muestre que si A_1 y A_2 son similares entonces $\det A_1 = \det A_2$.

(c) Determine si es cierto o no: Si A_1 y A_2 son similares, entonces A_1^T y A_2^T son similares.

(13) Muestre que si el sistema $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ tiene solución única para todo $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ entonces $\det(A) \neq 0$.