Universidad de los Andes
Álgebra Lineal (202119)

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

---

2. Vectores y matrices

(1) Muestre que para todo par de vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ se tiene que $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$.

(2) Muestre que para todo par de vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ se tiene que $r(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = (r\vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{v}}$.

(3) Decimos que un conjunto es convexo si para todo par de elementos x e y que están en el conjunto y para todo $\lambda \in [0,1]$ se cumple que $\lambda x + (1-\lambda)y$ también es un elemento del conjunto.

(a) Muestre que el conjunto $P_1 = \{x \mid x > 0\}$ de todos los números reales positivos es un conjunto convexo.

(b) Muestre que el conjunto $P_2 = \{(x,y) \mid x, y > 0\}$ de todos los puntos en el plano sobre el primer cuadrante es un conjunto convexo.

(c) Muestre que el plano $Ax + By + Cz = D$ es un conjunto convexo, sin importar qué valor tienen A, B y C.

(d) Muestre que el conjunto $R_{\vec{\mathbf{0}}} = \{\vec{\mathbf{x}} \mid A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}\}$ el conjunto de todas las soluciones al sistema homogéneo $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ es un conjunto convexo.

(e) Muestre que el conjunto $R_{\vec{\mathbf{b}}} = \{\vec{\mathbf{x}} \mid A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}\}$ el conjunto de todas las soluciones al sistema no-homogéneo $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ es un conjunto convexo.

(f) Tenemos un vector fijo $\vec{\mathbf{x}}_0$, y tomamos el conjunto $M = \{A \mid A\vec{\mathbf{x}}_0 = \vec{\mathbf{0}}\}$ el conjunto de todas las matrices tal que al multiplicar por $\vec{\mathbf{x}}_0$ da el vector $\vec{\mathbf{0}}$. Muestre que M es convexo.

Indicación: Para probar que un conjunto es convexo tiene que tomar dos puntos sobre el conjunto, escribir de forma explicita la combinación $\lambda x + (1-\lambda)y$ y mostrar que esta cumple la condición o propiedad que hace que un elemento pertenezca a un conjunto. En el primero, por ejemplo, deben probar que esa combinación es un número positivo.

(4) Realice las operaciones entre matrices si es posible. Defina

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 5/4 \end{bmatrix}$$

(a) A^2

(b) AB

(c) ABC

(d) $(A-D)^2$

(e) $A^2 - 2DA + D^2$

(f) $CD - A$

(5) Encuentre la solución general al problema

(a) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y - z + w = 0 \\ 2x + 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x+y-z+w=0 \\ 2z-w=0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x+y-z+w=1 \\ x+2y-z+2w=-1 \\ 2x+3y-2z+3w=0 \end{cases}$

(6) Sean A y B matrices cuadradas de tamaño $n\times n$, $\vec{\mathbf{u}}$ un vector de n entradas. Suponga que $\vec{\mathbf{u}}$ soluciona los sistemas $A\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}}$ y $B\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}}$. Muestre que $\vec{\mathbf{u}}$ también soluciona el sistema $(A+B)\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}}$.

(7) Sean A y B matrices cuadradas de tamaño $n\times n$, $\vec{\mathbf{u}}$ un vector de n entradas. Suponga que $\vec{\mathbf{u}}$ soluciona los sistemas $A\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{b}}$ y $B\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}}$. Muestre que $\vec{\mathbf{u}}$ también soluciona el sistema $(A+B)\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{b}}$.

(8) Consideremos dos sistemas homogéneos $A\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}}$, $B\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}}$ y consideremos el sistema $(A+B)\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}}$. ¿Es cierto que si $\vec{\mathbf{x}}$ soluciona el problema $(A+B)\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}}$ entonces $\vec{\mathbf{x}}$ soluciona el problema $A\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}}$ y el problema $B\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}}$?

(9) Tenemos dos matrices A y B tal que $AB=BA$. Consideremos el conjunto

$$\mathrm{Comp}(A,B)=\{B\vec{\mathbf{x}} \mid \text{ el vector } \vec{\mathbf{x}} \text{ cumple } A\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}}\},$$

que consiste en todos los elementos de la forma $B\vec{\mathbf{x}}$ donde $A\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}}$, y el conjunto $\ker(A)=\{\vec{\mathbf{x}} \mid A\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}}\}$. Compruebe que $\mathrm{Comp}(A,B)\subseteq\ker(A)$.

(10) **La matriz de Leslie.**

Considere el siguiente modelo. Tenemos una especie que se reproduce en periodos de tiempo t. Por ejemplo, si t mide años, en $t=0$ tenemos la población inicial en la cual habrán especies de edad 0, edad 1, edad 2, etc. En $t=1$ tendremos cantidades distintas, no solo por aquellas que cumplerion un año de edad, sino también por especies nuevas y especies que murieron.

El crecimiento de la edad i a la edad $i+1$ está determinado por cierta taza de mortandad M_i, mientras que la cantidad de hembras en la edad i que se reproducen y dan individuos de edad cero está determinada por una tasa de fertilidad F_i. Digamos que la cantidad de individuos en la edad i, en el tiempo t está dada por $n_i(t)$, y que la cantidad de individuos inicial está dado por N_i. Entonces

$$n_0(0)=N_0, n_1(0)=N_1, \ldots, n_k(0)=N_k.$$

Además $n_i(t+1)=M_{i-1}n_{i-1}(t)$ para todo $i=1,\ldots,k$. Mientras que

$$n_0(t+1)=F_0n_0(t)+F_1n_1(t)+\cdots+F_{k-1}n_{k-1}(t)+F_kn_k(t).$$

Escrito de otra forma

$$\begin{cases} n_0(t+1)=F_0n_0(t)+F_1n_1(t)+\cdots+F_{k-1}n_{k-1}(t)+F_kn_k(t) \\ n_1(t+1)=M_0n_0(t) \\ n_2(t+1)=M_1n_1(t) \\ \qquad\qquad\vdots \\ n_k(t+1)=M_{k-1}n_{k-1}(t) \end{cases}$$

(a) Escriba este sistema en forma matricial, considerando las variables como $n_0(t), n_1(t), \ldots, n_k(t)$. Esta matriz se llama **matriz de Leslie**.

(b) Encuentre la población cuando en el tiempo $t=1$ si $M_i=1/2$, $F_i=2$, y $N_i=8$ para todos los $i=0,\ldots,2$.