Universidad de los Andes
Álgebra Lineal (202020)

Prof.: Otaivin Martínez Mármol.

---

(1) Muestre que para todo par de vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ se tiene que $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$.

(2) Muestre que para todo par de vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ se tiene que $r(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = (r\vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{v}}$.

(3) Suponga que A es una matriz cuadrada de 2×2 tal que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Responda: ¿existe una única matrix A que cumple esta propiedad? En caso negativo, encuentre todas las matrices que cumplen esta propiedad.

(4) Encuentre una matriz C tal que

$$C \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

(5) Considere el sistema homogéneo $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$, suponga que $\vec{\mathbf{x}}_1$ y $\vec{\mathbf{x}}_2$ son dos soluciones distintas al problema. Muestre que la combinación lineal $\lambda\vec{\mathbf{x}}_1 + (1-\lambda)\vec{\mathbf{x}}_2$ también es solución para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(6) Decimos que un conjunto es convexo si para todo par de elementos x e y que están en el conjunto y para todo $\lambda \in [0,1]$ se cumple que $\lambda x + (1-\lambda)y$ también es un elemento del conjunto.

(a) Muestre que el conjunto $P_1 = \{x \mid x > 0\}$ de todos los números reales positivos es un conjunto convexo.

(b) Muestre que el conjunto $P_2 = \{(x,y) \mid x, y > 0\}$ de todos los puntos en el plano sobre el primer cuadrante es un conjunto convexo.

(c) Muestre que el plano $Ax + By + Cz = D$ es un conjunto convexo, sin importar qué valor tienen A, B y C.

(d) Muestre que el conjunto $R_{\vec{\mathbf{0}}} = \{\vec{\mathbf{x}} \mid A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}\}$ el conjunto de todas las soluciones al sistema homogéneo $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ es un conjunto convexo.

(e) Muestre que el conjunto $R_{\vec{\mathbf{b}}} = \{\vec{\mathbf{x}} \mid A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}\}$ el conjunto de todas las soluciones al sistema no-homogéneo $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ es un conjunto convexo.

(f) Tenemos un vector fijo $\vec{\mathbf{x}}_0$, y tomamos el conjunto $M = \{A \mid A\vec{\mathbf{x}}_0 = \vec{\mathbf{0}}\}$ el conjunto de todas las matrices tal que al multiplicar por $\vec{\mathbf{x}}_0$ da el vector $\vec{\mathbf{0}}$. Muestre que M es convexo.

Indicación: Para probar que un conjunto es convexo tiene que tomar dos puntos sobre el conjunto, escribir de forma explicita la combinación $\lambda x + (1-\lambda)y$ y mostrar que esta cumple la condición o propiedad que hace que un elemento pertenezca a un conjunto. En el primero, por ejemplo, deben probar que esa combinación es un número positivo.

(7) Tenemos dos matrices A y B tal que $AB = BA$. Consideremos el conjunto

$$\mathrm{Comp}(A,B) = \{B\vec{\mathbf{x}} \mid \text{ el vector } \vec{\mathbf{x}} \text{ cumple } A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}\},$$

que consiste en todos los elementos de la forma $B\vec{\mathbf{x}}$ donde $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$, y el conjunto $\ker(A) = \{\vec{\mathbf{x}} \mid A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}\}$. Compruebe que $\mathrm{Comp}(A,B) \subseteq \ker(A)$.

(8) Consideremos dos sistemas homogéneos $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$, $B\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ y consideremos el sistema $(A+B)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$. ¿Es cierto que si $\vec{\mathbf{x}}$ soluciona el problema $(A+B)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ entonces $\vec{\mathbf{x}}$ soluciona el problema $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ y el problema $B\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$?

(9) **La matriz de Leslie.**

Considere el siguiente modelo. Tenemos una especie que se reproduce en periodos de tiempo t. Por ejemplo, si t mide años, en $t=0$ tenemos la población inicial en la cual habrán especies de edad 0, edad 1, edad 2, etc. En $t=1$ tendremos cantidades distintas, no solo por aquellas que cumplerion un año de edad, sino también por especies nuevas y especies que murieron.

El crecimiento de la edad i a la edad $i+1$ está determinado por cierta taza de mortandad M_i, mientras que la cantidad de hembras en la edad i que se reproducen y dan individuos de edad cero está determinada por una tasa de fertilidad F_i. Digamos que la cantidad de individuos en la edad i, en el tiempo t está dada por $n_i(t)$, y que la cantidad de individuos inicial está dado por N_i. Entonces

$$n_0(0) = N_0, n_1(0) = N_1, \dots, n_k(0) = N_k.$$

Además $n_i(t+1) = M_{i-1}n_{i-1}(t)$ para todo $i = 1, \dots, k$. Mientras que

$$n_0(t+1) = F_0 n_0(t) + F_1 n_1(t) + \cdots + F_{k-1}n_{k-1}(t) + F_k n_k(t).$$

Escrito de otra forma

$$\begin{cases} n_0(t+1) = F_0 n_0(t) + F_1 n_1(t) + \cdots + F_{k-1}n_{k-1}(t) + F_k n_k(t) \\ n_1(t+1) = M_0 n_0(t) \\ n_2(t+1) = M_1 n_1(t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ n_k(t+1) = M_{k-1}n_{k-1}(t) \end{cases}$$

(a) Escriba este sistema en forma matricial, considerando las variables como $n_0(t), n_1(t), \dots, n_k(t)$. Esta matriz se llama **matriz de Leslie**.

(b) Encuentre la población cuando en el tiempo $t=1$ si $M_i = 1/2$, $F_i = 2$, y $N_i = 8$ para todos los $i = 0, \dots, 2$.