

8.2 Matrices semejantes

- (1) Recuerde que dos matrices A y B en $M(n \times n)$ son semejantes si existe una matriz invertible C tal que $A = C^{-1}BC$, y en tal caso escribimos $A \sim B$.
 - (a) Muestre que si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$.
 - (b) Muestre que si $A \sim B$ entonces $\det(A) = \det(B)$.
 - (c) Muestre que si $A \sim B$ y A es invertible, entonces B es invertible y es semejante a A^{-1} .
 - (d) Muestre que si $A \sim B$ entonces $A^2 \sim B^2$.
- (2) Decimos que una matriz $A \in M(n \times n)$ tiene raíz cuadrada si existe una matriz $R \in M(n \times n)$ tal que $A = R^2$. En tal caso decimos que R es *una* raíz cuadrada de A .
 - (a) Muestre que si una matriz A tiene raíz cuadrada entonces $\det(A) \geq 0$.
 - (b) Muestre que si R es una raíz cuadrada de A entonces $-R$ también es raíz cuadrada.
 - (c) Muestre que pueden haber más de dos raíces cuadradas.

Ayuda: piense en la matriz identidad

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y en las matrices

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Cuántas raíces tiene la identidad de tamaño 3? ¿cuántas tiene la identidad de tamaño 4?
En general, ¿cuántas raíces tiene la identidad de tamaño n ?

- (d) Suponga que R es una raíz cuadrada de A y $R \sim B$. Muestre que $B^2 \sim A$.