Universidad de los Andes
Álgebra lineal (202520)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

7.4 Proyecciones ortogonales

(1) Sea $V = \text{span}\{(1,0,3,0),(0,-1,0,2)\}$ y sea $\vec{\mathbf{u}} = (2,1,-2,3)$.

  (a) Encuentre la proyección de $\vec{\mathbf{u}}$ en V.
  (b) Encuentre la proyección de $\vec{\mathbf{u}}$ en $V^\perp$.
  (c) Compruebe el teorema de Pitágoras par $\vec{\mathbf{u}}$:

$$\|\vec{\mathbf{u}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{u}}^{\|}\|^2 + \|\vec{\mathbf{u}}^{\perp}\|^2.$$

(2) Encuentre la matriz de proyección ortogonal al espacio.

  (a) $W = \text{span}\{(1,1,0),(-1,2,0)\}$ en $\mathbb{R}^3$.
  (b) $P = \{(x,y,z,w) : 2x - y + 3z + 5w = 0\}$ en $\mathbb{R}^4$.
  (c) $H = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) : x_1 - 2x_2 - x_5 = 0, 2x_3 + x_4 = 0\}$ en $\mathbb{R}^5$.
  (d) la recta $3x + y = 0$ en el plano.

(3) Sea U un subespacio del espacio vectorial V. Sea P_U la transformación que proyecta todo vector de V en U, es decir

$$P_U : V \to U, \qquad P_U(\vec{\mathbf{v}}) = \text{Proy}_U(\vec{\mathbf{v}}).$$

  (a) Muestre que $\ker(P_U) = U$.
  (b) Muestre que $P_U(P_{U^\perp}(\vec{\mathbf{v}})) = \vec{\mathbf{0}}$ para todo vector $\vec{\mathbf{v}} \in V$.

(4) En $M(2 \times 2)$ defina el producto interno como

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ax + by + cz + dw.$$

  (a) Muestre que el conjunto $\{A_1, A_2\}$ donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

  es un sistema ortogonal.
  (b) Sea $W = \text{span}\{A_1, A_2\}$, encuentre la proyección de la matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

  al subespacio W.
  (c) Encuentre la proyección de la matriz A del ítem anterior al espacio $W^\perp$.
  (d) Compruebe el teorema de pitágoras

$$\|A\|^2 = \|A^{\|}\|^2 + \|A^{\perp}\|.$$

(5) **Representar una función como suma de funciones trigonométricas.** Sea V el espacio vectorial de todas las funciones continuas en $[-\pi, \pi]$. Defina los subespacios

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad C = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Un producto interno para el espacio V es

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Sea $f(x) = x$ en el dominio $[-\pi, \pi]$. Encuentre los productos internos $\langle f(x), \sin(nx) \rangle$ y $\langle f(x), \cos(nx) \rangle$ donde $n \in \mathbb{N}$.

Rta.: $\langle f(x), \cos(nx) \rangle = 0$, $\langle f(x), \sin(nx) \rangle = 2(-1)^{n+1}/n$

(b) En el set de ejercicios de la Sección 7.3 mostramos que el conjunto $\{\sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal. Encuentre la proyección de $f(x) = x$ con dominio $[-\pi, \pi]$ en el espacio $C = \operatorname{span}\{\cos(nx) : n \in \mathbb{N}\}$.

Solución: como $\{\cos(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal, entonces

$$\operatorname{Proy}_C(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f \cdot \cos(nx) \rangle \cos(nx).$$

Pero $\langle f(x), \cos(nx) \rangle = \langle x, \cos(nx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx)\, \mathrm{d}x = 0$ para todo n. Entonces $\operatorname{Proy}_C(f) = 0$.

(c) En el set de ejercicios de la Sección 7.3 mostramos que el conjunto $\{\cos(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal. Encuentre la proyección de $f(x) = x$ con dominio $[-\pi, \pi]$ en el espacio $C = \operatorname{span}\{\sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$.

Indicación: la proyección resulta ser una serie.

Rta.: $f^{\parallel}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$

(d) También mostramos que el conjunto $\{\cos(nx) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal. Encuentre la proyección de $f(x) = x$ con dominio $[-\pi, \pi]$ en el espacio generado por el sistema ortonormal $F = \operatorname{span}\{\sin(nx), \cos(nx) : n \in \mathbb{N}\}$.

Indicación: la proyección resulta ser una serie.

Rta.: $f^{\parallel}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$

Una pregunta interesante es qué tan cercano es $f^{\parallel}$ de f. Es decir, qué tanto error se comete al usar $f^{\parallel}$ y no f. Una forma de medir este error podría ser calculando $\|f - f^{\parallel}\|$. Pero $f - f^{\parallel} = f^{\perp}$, el error que deseamos calcular es $\|f^{\perp}\|$. Por el teorema de Pitágoras

$$\|f^{\perp}\|^2 = \|f\|^2 - \|f^{\parallel}\|^2.$$

(e) Encuentre $\|f\|$. Recuerde que en este ejercicio $f(x) = x$ definida en el dominio $[-\pi, \pi]$.

Rta.: $\|f\| = \sqrt{2\pi^2/3}$

Nos falta calcular $\|f^{\parallel}\|$. Para calcular esta norma recuerde que $\sin(nx)$ es una base ortonormal, y en este caso

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{2n+2}}{n^2} \|\sin(nx)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = 4 \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Entonces $\|f - f^{\parallel}\| = \|f^{\perp}\| = \sqrt{\|f\|^2 - \|f^{\parallel}\|^2} = \sqrt{2\pi^2/3 - 2\pi^2/3} = 0$. Pero si $\|f^{\perp}\| = 0$ entonces $f^{\perp} = 0$. Es decir

(Fourier) $$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \quad \text{para } x \in [-\pi, \pi].$$

Esta identidad resulta útil para calcular cosas interesantes.

(f) Evalúe la ecuación (Fourier) en $x = \pi/2$ para probar

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{2n+1}$$

(g) De la anterior igualdad deduzca

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$