Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

7.3 Complemento ortogonal

(1) Encuentre el complemento ortogonal de cada uno de los espacios descritos.

(a) $W = \operatorname{span}\{(1,1,0),(-1,2,0)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(b) $P = \{(x,y,z,w) : 2x - y + 3z + 5w = 0\}$ en $\mathbb{R}^4$.

(c) $H = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) : x_1 - 2x_2 - x_5 = 0, 2x_3 + x_4 = 0\}$ en $\mathbb{R}^5$.

(d) la recta $3x + y = 0$ en el plano.

(2) En $M(2\times 2)$ defina el producto interno como

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ax + by + cz + dw.$$

(a) Determine si las matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

son ortogonales.

(b) Encuentre una matriz $A \in M(2\times 2)$ que sea ortogonal a la matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Es posible que una matriz A distinta a la matriz cero sea ortogonal a sí misma.

(d) Encuentre el complemento ortogonal al espacio

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} s & 2s \\ s & -s \end{bmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(e) Encuentre el complemento ortogonal al espacio

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} s-t & s+t \\ 2s & t-2s \end{bmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ayuda: encuentre una base para este subespacio.

(3) Sea U un subespacio de V. Muestre que $U \cap U^{\perp} = \{\vec{\mathbf{0}}\}$.

(4) Sea V el espacio vectorial de todas las funciones continuas en $[-\pi,\pi]$. Defina los subespacios

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad C = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Un producto interno para el espacio V es

$$f \cdot g = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Muestre que si $n \neq m$ entonces $\cos(nx)$ es ortogonal a $\cos(mx)$.

(b) Muestre que si $n \neq m$ entonces $\sin(nx)$ es ortogonal a $\sin(mx)$.

(c) Muestre que para todo n y m la función $\sin(nx)$ es ortogonal a $\cos(mx)$.

(d) Muestre que los subespacios S y C son ortogonales entre ellos.

(e) ¿Pueden los subespacios S y C tener dimensión finita?