

## 7.2 Matrices ortogonales

- (1) Determine si las siguientes matrices son ortogonales.

(a)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

(c)  $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

(b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(d)  $\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ .

- (2) Suponga que  $A$  es una matriz ortogonal. Encuentre  $A(AA^T)^{-1}A^T$ .

- (3) Muestre que la matriz de rotación en  $\mathbb{R}^3$  alrededor del eje  $z$  dada por

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es ortogonal para todo ángulo  $\theta$ .

- (4) Sea  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la siguiente transformación

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

- (a) Muestre que para  $\vec{v} = (1, -3)$  se cumple que  $\|\vec{v}\| = \|T(\vec{v})\|$ .
- (b) Muestre que para todo vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  se cumple que  $\|\vec{v}\| = \|T(\vec{v})\|$ .
- (c) Muestre que para los vectores  $\vec{v}_1 = (1, 1)$  y  $\vec{v}_2 = (1, 2)$  se cumple que el ángulo comprendido entre  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  es igual al ángulo comprendido entre  $T(\vec{v}_1)$  y  $T(\vec{v}_2)$ .
- (d) En general, muestre que si tenemos los vectores  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  el ángulo comprendido entre  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  es igual al ángulo comprendido entre  $T(\vec{v}_1)$  y  $T(\vec{v}_2)$ .