

7.2 Matrices ortogonales

(1) Determine si las siguientes matrices son ortogonales.

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(d) \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

(2) Suponga que A es una matriz ortogonal. Encuentre $A(AA^T)^{-1}A^T$.

(3) Muestre que la matriz de rotación en \mathbb{R}^3 alrededor del eje z dada por

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es ortogonal para todo angulo θ .

(4) Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la siguiente transformación

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

- (a) Muestre que para $\vec{v} = (1, -3)$ se cumple que $\|\vec{v}\| = \|T(\vec{v})\|$.
- (b) Muestre que para todo vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ se cumple que $\|\vec{v}\| = \|T(\vec{v})\|$.
- (c) Muestre que para los vectores $\vec{v}_1 = (1, 1)$ y $\vec{v}_2 = (1, 2)$ se cumple que el ángulo comprendido entre \vec{v}_1 y \vec{v}_2 es igual al ángulo comprendido entre $T(\vec{v}_1)$ y $T(\vec{v}_2)$.
- (d) En general, muestre que si tenemos los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 el ángulo comprendido entre \vec{v}_1 y \vec{v}_2 es igual al ángulo comprendido entre $T(\vec{v}_1)$ y $T(\vec{v}_2)$.