Universidad de los Andes
Álgebra lineal (202520)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

7.1 Sistemas ortogonales y ortonormales

(1) Para cada colección de vectores, determine si es un sistema ortonormal, ortogonal o ninguno de ellos.

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(e) $\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}.$

(f) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(2) Sea $V = M(2 \times 2)$ el espacio de matrices dos por dos. Defina el producto interno entre matrices como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = ax + by + cz + dw.$$

Muestre que

(a) El conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

es un sistema ortogonal.

(b) Transforme el sistema ortogonal en un sistema ortonormal.

(c) Sea W el espacio generado por el sistema ortonormal del ítem anterior. Escriba la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

como combinación lineal de los elementos de la base ortonormal del ítem anterior.

(d) Muestre que toda matriz del subespacio $W \subset V = M(2 \times 2)$ es simétrica.
Ayuda: si los elementos de la base son matrices simétricas, ¿cómo puedo extender eso al generado?

(3) Suponga que $B = \{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2\}$ es un sistema ortonormal de un espacio vectorial V. Muestre que $\vec{\mathbf{v}}_1$ y $\vec{\mathbf{v}}_2$ son vectores linealmente independientes.

Ayuda: suponga que existen α_1 y α_2 tales que $\alpha_1\vec{\mathbf{v}}_1 + \alpha_2\vec{\mathbf{v}}_2 = \vec{\mathbf{0}}$. Realice el producto interno entre $\alpha_1\vec{\mathbf{v}}_1 + \alpha_2\vec{\mathbf{v}}_2$ y $\vec{\mathbf{v}}_1$, para deducir que $\alpha_1 = 0$.

(4) Suponga que $\{\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2\}$ es una base para un subespacio W del espacio vectorial V. Muestre que para todo vector $\vec{\mathbf{w}}$ en W escrito en la forma:

$$\vec{\mathbf{w}} = \alpha_1\vec{\mathbf{w}}_1 + \alpha_2\vec{\mathbf{w}}_2,$$

se cumple que $\alpha_i = \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{w}}_i$.

Ayuda: use un argumento similar al del punto anterior. Realice el producto punto entre $\alpha_1\vec{\mathbf{w}}_1 + \alpha_2\vec{\mathbf{w}}_2$ y $\vec{\mathbf{w}}_1$ para deducir el valor de α_1.