Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

6.4 Matrices de transformación

(1) Encuentre la matriz de transformación para cada una de las siguientes transformaciones. Las bases en cada espacio es la canonica.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida como

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$$

Rta.: $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida como

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x-y \\ 2y-x \end{bmatrix}$$

Rta.: $A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida como

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-3y+z \\ 5z-y \end{bmatrix}$$

Solución: evaluamoe en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, la cual es $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Esto es $T(1,0,0) = (1,0)$; $T(0,1,0) = (-3,-1)$; $T(0,0,1) = (1,5)$. La matriz asociada en las bases canónicas son

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida como

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} \\ z \\ x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Rta.: $A_T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

(2) Para la transformación $T : \mathbb{R}^3_{B_1} \to \mathbb{R}^3_{B_2}$ definida como

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y+z \\ x-y-z \\ x+y-z \end{bmatrix},$$

donde $\mathbb{R}^3_{B_i}$ indica que la base ordenada del espacio es B_i. Encuentre la matriz de representación dada las bases de cada espacio.

(a) $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(b) $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Solución: nos indican que T va el espacio $\mathbb{R}^3$ con la base B_1 y llega al espacio $\mathbb{R}^3$ con la base B_2. Lo que debemos hacer es encontrar la imagen de cada elemento de la base B_1 y luego el vector coordinado en la base B_2. Ahora $T(1,-1,1) = (3,1,-1)$; $T(0,1,0) = (-1,-1,1)$; $T(1,-1,0) = (2,2,0)$. Para los vectores coordinados hacemos la matriz ampliada $[B_2 \mid T(B_1)]$ y reducimos para obtener $[I_3 \mid A_T]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right]}_{F_1 \leftrightarrow F_3} \sim \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right]}_{F_2 \to F_2 - F_1}$$

$$\sim \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right]}_{F_2 \leftrightarrow F_3} \sim \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]}_{F_3 \leftrightarrow F_3 - F_2}.$$

La matriz de representación de la transformación es

$$A_T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(3) Sea $T : M(2 \times 2) \to M(2 \times 2)$ la transformación definida como $T(A) = A^T$.

(a) Muestre que T es una transformación lineal.

(b) Encuentre la matriz de transformación de T con las bases canónicas.

(4) Sea $M : C_2(\mathbb{R}) \to P_2$, donde $C_2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ tiene segunda derivada continua}\}$, la transformación definida como

$$F(f) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

(a) Muestre que M es una transformación lineal.

(b) Vamos a restringir nuestra transformación al espacio $W = \operatorname{span}\{1, \cos(x), \sin(x), \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{-x}\}$. Muestre que el conjunto $\{1, \cos(x), \sin(x), \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{-x}\}$ es linealmente independiente.

(c) Encuentre la matriz de transformación A_M para la transformación $M : W \to P_2$.

Rta.: $A_M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) Encuentre el polinomio de McLaurin de grado dos de la función $g(x) = 4 + 5\,\mathrm{e}^x - 3\sin(x)$.

Rta.: $M(g) = 9 + 2x + 8x^2$