

6.3 Cambio de base

- (1) Encuentre la matriz de cambio de base entre la base ordenada B_1 y la base ordenada B_2 .

(a) $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$ Rta.: $M = \begin{bmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

(b) $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

Solución: lo que deseamos es expresar cada vector de la base B_1 como combinación lineal de vectores en B_2 . Para esto construimos la matriz ampliada $[B_2 \mid B_1]$. Al reducirla en la forma $[I_3 \mid M]$ entonces M será la matriz de cambio de base de B_1 a B_2 .

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]}_{F_2 \rightarrow F_2 - F_1} \sim \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right]}_{F_2 \leftrightarrow F_3} \\ & \sim \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \end{array} \right]}_{F_3 \rightarrow F_3/2} \sim \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \end{array} \right]}_{\substack{F_1 \rightarrow F_1 + F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 - F_3}} \sim \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \end{array} \right]}_{F_1 \rightarrow F_1 - F_2}. \end{aligned}$$

La matriz de cambio de base es

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(c) $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$

Rta.: $M = 1/6 \begin{bmatrix} 8 & 8 & -4 & 6 \\ -1 & 5 & -4 & 0 \\ 7 & 1 & -2 & 6 \\ 7 & 1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$

(d) $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

Rta.: $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- (2) Encuentre el vector coordinado de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

con respecto a las siguientes bases ordenadas.

(a) $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

Rta.: $A_{B_1} = (1, -1/2, -3/2, 0)$

(b) $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

Rta.: $A_{B_2} = (3/2, 1/2, 0, 1)$

$$(c) \ B_3 = \left\{ \begin{bmatrix} \pi & -\pi \\ \pi & 2\pi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi & \pi \\ 2\pi & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{Rta.: } A_{B_3} = (1/\pi, 0, 0, 0)$$

- (3) Encuentre el vector coordinado del polinomio $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ con respecto a la base ordenada $B = \{1, 1 - x, 1 - x^2, 1 - x^3\}$ en P_3 .

$$\text{Rta.: } p_B(x) = (-7, 5, -2, 3)$$