Universidad de los Andes
Álgebra lineal (202520)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

6.1 Transformaciones lineales

(1) Determine si las siguientes transformaciones son lineales.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida como
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ y-z \end{bmatrix}.$$

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida como
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = xy - z$$

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida como
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ y-x \\ xy \end{bmatrix}.$$

(d) $T : F \to \mathbb{R}$, definida como
$$T\left(f(t)\right) = \pi - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(e) $T : F \to \mathbb{R}$, definida como
$$T\left(f(t)\right) = -\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

donde $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$.

(f) $T : P_2 \to \mathbb{R}$, definida como
$$T\left(p(t)\right) = p'(t).$$

(g) $T : P_2 \to P_3$, definida como
$$T(at^2 + bt + c) = (a+b)t^3 + (b+c)t^2 + (a-c)t + (a+b+c).$$

(2) Para cada una de las transformaciones del punto (1) que resultaron ser transformaciones lineales, encuentre el kernel y la imagen.

(3) Para cada una de las siguientes transformaciones determine la nulidad y el rango. En cada uno compruebe que se cumple el teorema de la dimensión.
$$\dim(\text{espacio de salida}) = \operatorname{null}(T) + \operatorname{rank}(T).$$

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x-y \end{bmatrix}.$$

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donde
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x-z \\ 2x-y \end{bmatrix}.$$

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donde
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}.$$

(d) $T : P_3 \to P_2$ donde
$$T(p(t)) = p'(t).$$

(e) $T : M(2 \times 2) \to \mathbb{R}^4$ donde
$$T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}.$$

(f) $T : \mathbb{R}^2 \to M(2 \times 2)$ donde
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x & y \\ y & x + y \end{bmatrix}.$$