Universidad de los Andes
Álgebra lineal (202520)
Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

5.3 Combinaciones lineales (Parte 1)

(1) A continuación se listan vectories $\vec{\mathbf{v}}_i$ y un vector $\vec{\mathbf{a}}$ en un espacio $\mathbb{R}^n$. Determine si el vector $\vec{\mathbf{a}}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{\mathbf{v}}_i$.

(a) los vectores $\vec{\mathbf{v}}_1 = (1, 0)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (2, -1)$ y $\vec{\mathbf{a}} = (2, 4)$. **Rta.:** sí

(b) los vectores $\vec{\mathbf{v}}_1 = (-1, 2, 1)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (1, 2, 1)$ y $\vec{\mathbf{a}} = (1, 1, -1)$. **Rta.:** no

(c) los vectores $\vec{\mathbf{v}}_1 = (-1, 2, 1)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (1, 2, 1)$ y $\vec{\mathbf{a}} = (-1, 6, 3)$. **Rta.:** sí

(d) los vectores $\vec{\mathbf{v}}_1 = (0, 1, -1, 2)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (1, 1, -1, 2)$, $\vec{\mathbf{v}}_3 = (0, 1, -2, 1)$ y $\vec{\mathbf{a}} = (4, 6, -7, 11)$. **Rta.:** sí

(2) Este ejercicio es similar al anterior, pero en espacios distintos a $\mathbb{R}^n$. Determine si el vector $\vec{\mathbf{a}}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{\mathbf{v}}_i$.

(a) en $M(2 \times 2)$, los vectores $\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$. **Rta.:** no

(b) en $M(2 \times 2)$, los vectores $\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2\pi \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} 2 & \pi \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. **Rta.:** sí

(c) en P_2, los vectores $\vec{\mathbf{v}}_1 = 2x^2 + 1$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = 2x^2 + 3x$ y $\vec{\mathbf{a}} = -6x + 1$. **Rta.:** sí

(d) en $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ función continua}\}$, los vectores $\vec{\mathbf{v}}_1 = \mathrm{e}^{-x} + x$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = \mathrm{e}^{x} - x$ y $\vec{\mathbf{a}} = \mathrm{e}^{-x} + 2\,\mathrm{e}^{x} + 2x$. **Rta.:** no

(e) en F, los vectores $\vec{\mathbf{v}}_1 = \cos(2x)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = \sin(2x)$ y $\vec{\mathbf{a}} = \cos^2(x)$. **Rta.:** sí

(3) Describa el espacio generado por cada uno de los conjuntos de vectores dados

(a) $\{(1, 1), (1, -1)\}$ en $\mathbb{R}^2$,

(b) $\{(1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$ en $\mathbb{R}^3$,

(c) $\{x^3, x\}$ en P_3,[1]

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ en $M(2 \times 2)$.

(e) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ en $M(2 \times 2)$.

(4) En el espacio $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ función}\}$ determine si la función $g(x) = \sin^2(x)$ hace parte del generado por la funciones $f_1(x) = \tan^2(x)$ y $f_2(x) = \tan^2(x)\sin^2(x)$.

(5) Responda falso o verdadero, justifique su respuesta

(a) Es subespacio $\{\vec{\mathbf{0}}\}$ es un subespacio generado.

(b) La función $f(x) = \cosh(x)$ hace parte del generado $\operatorname{span}\{\mathrm{e}^{-x}, \mathrm{e}^{x}\}$.

(c) Si un subespacio es finitamente generado, entonces los generadores son únicos.
Indicación: si usted quiere probar que esta afirmación es falsa, basta con mostrar un contraejemplo, es decir, un subespacio con dos grupos de generadores distintos.

(d) Los espacios generados siempre tienen una cantidad infinita de elementos.

[1] recuerde que P_n es el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a n

(6) Muestre que los espacios $\mathbb{R}^n$ son finitamente generados.

Ayuda: en clase vimos que $\mathbb{R}^3$ era finitamente generado por los vectores $\vec{\mathbf{e}}_1 = (1,0,0)$, $\vec{\mathbf{e}}_2 = (0,1,0)$ y $\vec{\mathbf{e}}_3 = (0,0,1)$. Generalize esta idea para cualquier tamaño n.

(7) Muestre que los espacios P_n son finitamente generados.

Ayuda: en clase vimos que P_2 era finitamente generado por los vectores $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ y $p_3(x) = x^2$. Generalize esta idea para cualquier tamaño n.

(8) Sean $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_k$ vectores de un espacio vectorial V. Muestre que el generado por estos vectores son un subespacio de V. Es decir, muestre que $\operatorname{span}\{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_k\} \subseteq V$ es un subespacio de V.

(9) Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, determine si sus soluciones son espacios generados, y en caso afirmativo determine cuales son sus generadores.

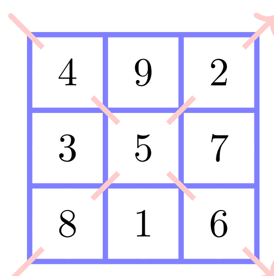
(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - z = 1 \\ 5x + 3y - z = 0 \end{cases}$, **Rta.:** no

(b) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - z = 0 \\ 5x + 3y - z = 0 \end{cases}$, **Rta.:** sí

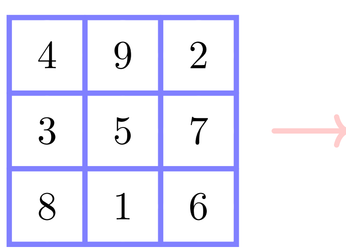
(c) $\begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$, **Rta.:** sí

(d) $\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 0 \\ -5x + 2z = 0 \\ 10x + 15y + 17z = 1 \end{cases}$, **Rta.:** no

(10) **Cuadrados mágicos.** Un cuadrado mágico de tamaño $n \times n$ es una cuadrícula en la cual todas las filas, columnas y las dos diagonales suman exactamente lo mismo, esta cantidad se llama el **número mágico**. Por ejemplo:



Todas las filas y columnas suman 15. Además sus dos diagonales suman $4 + 5 + 6 = 15$ y $8 + 5 + 2 = 15$. Entonces es un cuadrado mágico con número mágico igual a 15. Los cuadrados mágicos se pueden ver como matrices de tamaño $n \times n$.



$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(a) Muestre que en todo cuadrádo mágico de 2×2, todas sus entradas son la misma.

(b) Muestre que el conjunto de cuadrados mágicos de 2×2 son un subespacio finitamente generado, y encuentre su generador.