UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Álgebra lineal (202520)

Ejercicios para practicar

Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

5.2 Subespacios vectoriales

(1) Determine si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales del espacio vectorial dado. Los espacios $\mathbb{R}^n$ y $M(n\times n)$ están dotados con la suma y multiplicación usual, a menos que se indique lo contrario.

(a) El conjunto $W = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ del espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$.

(b) El conjunto $W = \{(1, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ del espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$.

(c) El conjunto $W = \{(x, y, z) \mid x = y = -2z\}$ del espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$.

(d) El conjunto $W \subset V = M(2 \times 2)$, donde W son todas las matrices dos por dos de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & -a_{11} \\ -a_{22} & a_{22} \end{bmatrix}$$

(e) El conjunto $W \subset V = M(3 \times 3)$, donde W son todas la matrices simétricas de tres por tres.

(2) Sea F el espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con la suma y el producto por escalar usual. Determine si el conjunto W definido como

$$W = \{c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

es un subespacio de F. Es decir, si todas las funciones que son suma de multiplos de e^x y e^{-x} son subespacio vectorial.

(3) En este ejercicio vamos a estudiar la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 3y = 0$ y vamos a conectar sus soluciones con el concepto de espacio vectorial.

(a) Muestre que las funciones $y_1(t) = \mathrm{e}^{-3t}$ y $y_2(t) = \mathrm{e}^{-t}$ son soluciones de la ecuación.

(b) Muestre que para cualquier par de constantes A y B la función $y(t) = A\,\mathrm{e}^{-3t} + B\,\mathrm{e}^{-t}$ es solución a la ecuación.

(c) Sea F es espacio de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Muestre que el conjunto

$$W = \{A\,\mathrm{e}^{-3t} + B\,\mathrm{e}^{-t} \mid A, B \in \mathbb{R}\}$$

es un subespacio de F. Es decir, W no solo tiene la propiedad de que sus elementos son solución a la ecuación, sino que además tienen estructura de espacio vectorial.

(4) **Cuadrados mágicos.** Un cuadrado mágico de tamaño $n \times n$ es una cuadrícula en la cual todas las filas, columnas y las dos diagonales suman exactamente lo mismo, esta cantidad se llama el **número mágico**. Por ejemplo:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Todas las filas y columnas suman 15. Además sus dos diagonales suman $4+5+6 = 15$ y $8+5+2 = 15$. Entonces es un cuadrado mágico con número mágico igual a 15. Los cuadrados mágicos se pueden ver como matrices de tamaño $n \times n$.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 9 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 8 & 1 & 6 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Muestre que los cuadrados mágicos de tamaño 3×3 son un subespacio de $M(3 \times 3)$.