Prof.: Otaivin Martínez Mármol. https://math.uniandes.edu.co/~o.martinez25/

4.4 Determinantes e inversas

(1) Para cada una de las siguientes matrices encuentre la matriz adjunta.

(a) $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

(d) $A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

(2) Para las matrices del ítem (1), determine si tiene inversa. En caso afirmativo encuentre la inversa de cada matriz.

(3) Sean $\vec{\mathbf{u}} = (1,1)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (-1,1)$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$ y sea

$$R = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

(a) Grafique los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ en $\mathbb{R}^2$.

(b) Encuentre el área encerrada por el paralelogramo generado por los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$.

(c) Encuentre los vectores $R\vec{\mathbf{u}}$ y $R\vec{\mathbf{v}}$ y grafíquelos en el plano.

(d) Encuentre el área encerrada por el paralelogramo generado por los vectores $R\vec{\mathbf{u}}$ y $R\vec{\mathbf{v}}$.

(e) Encuentre la inversa de R y encuentre dos vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ tales que $R\vec{\mathbf{u}}$ y $R\vec{\mathbf{v}}$ generen un paralelogramo con área 4 unidades cuadradas.

Repita el mismo ejercicio con la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Muestre además que no importa qué par de vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ tomemos, el área del paralelogramo generado por $P\vec{\mathbf{u}}$ y $P\vec{\mathbf{v}}$ siempre será cero.

(4) Muestre la siguiente fórmula para la inversa de una matriz cuadrada dos por dos:

Si A es una matriz de dos filas y dos columnas tal que $\det(A) \neq 0$ entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

(5) Muestre que si A es una matriz de tamaño n por n entonces

$$\det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}.$$